Mødet den 4de Marts.

Herr Geheime-Etatsraad *Andræ* meddeelte følgende Afhandling:

Om Rækkeudviklingen af de Formler, som tjene til Bestemmelsen af geodætiske Positioner paa den sphæroidiske Jordoverflade.

Da nærværende Meddelelse er en umiddelbar Fortsættelse og Afslutning af den tidligere, som beskjæftigede sig med Udledelsen af de forskjellige Formler, der ligge til Grund for de behandlede Rækkeudviklinger, saa ville ogsaa alle tidligere vedtagne Betegnelser uden videre Forklaring blive anvendte i det Følgende, hvor man tillige, for at lette Henviisningerne, har numereret samtlige Paragrapher og Formler i fortsat Række med de foregaaende.

§ 18.

Idet vi først skulle betragte Rækkeudviklingerne, som svare til det sphæroidiske Problems Løsning ved en Reduction til Kuglen, saa ville vi dog ikke her ligefrem anvende Formlerne i § 15, der ere byggede paa en forudgaaende Rækkeudvikling af det tilsvarende sphæriske Problem, men derimod foretrække at gaae tilbage til selve Grundformlerne, hvorved vi tillige gjøre Brug af de Lettelser, som frembyde sig ved at fastsætte en bestemt Følgeorden for den successive Beregning af de søgte Størrelser. Forudsætter man saaledes, at det stedse er Breden, som bestemmes først, dernæst Længden og sidst Azimuthet, saa vil man allerede i Formlen for Længdedifferentsen kunne indføre den fundne Brede, ligesom man atter ved Azimuthets Beregning kan anvende saavel denne Brede som selve Længdedifferentsen, og det bliver da overmaade let at ombytte de tidligere Formler med andre, der umiddelbart lade sig fremstille i Række. Det er ganske den samme Vei, som er bleven fulgt af *Puissant*, der dog heelt igjennem standser Udviklingen med Leddene af 3die Orden, hvorimod vi her overalt skulle medtage samtlige Led af 4de Orden og saaledes give Formlerne fuldstændigt samme Skarphed som de gauss'iske.

I den sphæriske Triangel, som fremstaaer ved at forbinde Polen med Endepunkterne af den under Azimuthet z fastlagte Storcirkelbue K, og som altsaa ikke ganske falder sammen med Trianglen AB_2P_2, hvor Siden $AB_2 = K_2$, har man umiddelbart:

$$\sin(\lambda + \Delta_2) = \sin\lambda\cos\left(\frac{K}{N}\right) - \cos\lambda\sin\left(\frac{K}{N}\right)\cos z \;.\;.\;.\;.\quad (35)$$

Sættes $\frac{K}{N} = k$ og betragtes λ og z som Constanter, k som uafhængig og Δ_2 som afhængig Variabel, saa har man ifølge den maclaurinske Række:

$$\Delta_2 = (1)_0\frac{k}{1} + (2)_0\frac{k^2}{1.2} + (3)_0\frac{k^3}{1.2.3} + (4)_0\frac{k^4}{1.2.3.4}, \;.\;.\;.\;.\quad (36)$$

hvor Differentialcoefficienterne: $\frac{d\Delta_2}{dk}$, $\frac{d^2\Delta_2}{dk^2}$, $\frac{d^3\Delta_2}{dk^3}$ og $\frac{d^4\Delta_2}{dk^4}$ ere betegnede med (1), (2), (3) og (4), idet tillige Rækkens første Led $(\Delta_2)_0$ er udeladt, da Δ_2 aabenbart forsvinder samtidigt med k.

Ved successiv Differentiation erholdes af (35):

$$\cos(\lambda+\Delta_2).(1) = -\sin\lambda\sin k - \cos\lambda\cos k\cos z$$

$$\cos(\lambda+\Delta_2).(2) - \sin(\lambda+\Delta_2).(1)^2 = -\sin\lambda\cos k + \cos\lambda\sin k\cos z$$

$$\begin{aligned}\cos(\lambda+\Delta_2).(3) - 3\sin(\lambda+\Delta_2).(2).(1) - \cos(\lambda+\Delta_2).(1)^3 \\ = \sin\lambda\sin k + \cos\lambda\cos k\cos z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\lambda+\Delta_2).(4) - 4\sin(\lambda+\Delta_2).(3).(1) - 6\cos(\lambda+\Delta_2).(2).(1)^2 \\ - 3\sin(\lambda+\Delta_2).(2)^2 + \sin(\lambda+\Delta_2).(1)^4 \\ = \sin\lambda\cos k - \cos\lambda\sin k\cos z\end{aligned}$$

og ved Indførelsen af Værdien: $k = 0$, faaes nu af disse Ligninger:

$(1)_0 = -\cos z$; $(2)_0 = -\operatorname{tang}\lambda \sin^2 z$;
$(3)_0 = (1 + 3\operatorname{tang}^2\lambda)\cos z \sin^2 z$;
$(4)_0 = \operatorname{tang}\lambda \sin^2 z\left\{1 + 3\operatorname{tang}^2\lambda - 3\cos^2 z(3+5\operatorname{tang}^2\lambda)\right\}$

hvilke Værdier substituerede i (36), idet man atter for k sætter $\frac{K}{N}$, giver Rækken:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_2 = -\cos z.\left(\frac{K}{N}\right) - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\lambda \sin^2 z\left(\frac{K}{N}\right)^2 + \tfrac{1}{6}(1 + 3\operatorname{tang}^2\lambda)\cos z \sin^2 z\left(\frac{K}{N}\right)^3 \\ + \tfrac{1}{24}\operatorname{tang}\lambda \sin^2 z\left\{1 + 3\operatorname{tang}^2\lambda - 3\cos^2 z(3+5\operatorname{tang}^2\lambda)\right\}\left(\frac{K}{N}\right)^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (37)$$

hvornæst man endelig ifølge (21) erholder:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = -\cos z\left(\frac{K}{M_m}\right) - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\lambda \sin^2 z\left(\frac{K}{M_m}\right)\left(\frac{K}{N}\right) + \tfrac{1}{6}(1+3\operatorname{tang}^2\lambda)\cos z \sin^2 z\left(\frac{K}{M_m}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 \\ + \tfrac{1}{24}\operatorname{tang}\lambda \sin^2 z\left\{1+3\operatorname{tang}^2\lambda - 3\cos^2 z(3+5\operatorname{tang}^2\lambda)\right\}\left(\frac{K}{M_m}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^3 \\ + \tfrac{1}{8}\cos 2\lambda \cos^3 z \,.\, e^2\left(\frac{K}{M_m}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 \end{aligned}\right\} (38)$$

§ 19.

Den sphæriske Triangel AB_2P_2 giver nu:

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{K_2}{N}\right) \cdot \frac{\sin z}{\cos\lambda_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

hvor $\lambda_2 = \lambda + \frac{K_2}{K}\varDelta_2$ maa betragtes som bekjendt. Da man imidlertid ved (38) bestemmer $\varDelta$ directe uden først at kjende $\varDelta_2$, bør man foretrække her at bortskaffe λ_2 ved Hjælp af $\lambda_1 = \lambda + \varDelta$, hvilket ogsaa let lader sig opnaae ved følgende Betragtning.

Ligesom Perpendiculæren, der nedfældes paa Polaraxen fra Punktet B_2, er udtrykt ved $N\cos\lambda_2$, saaledes er ogsaa den tilsvarende Perpendiculær, der nedfældes fra B, udtrykt ved $N_1\cos\lambda_1$. Men disse to Perpendiculærer forholde sig aabenbart til hinanden som FB_2 til FB, og man har derfor Ligningen:

$$\cos\lambda_2 = \frac{N_1\cos\lambda_1}{FB}.$$

Den allerede tidligere i § 13 betragtede Triangel FGB giver imidlertid:

$$FB \sin\left(\frac{K_2}{N}\right) = [R] \,.\, \sin\left(\frac{K}{[R]}\right),$$

og man har altsaa:

$$\cos \lambda_2 = \frac{N_1 \cos \lambda_1}{[R] \sin\left(\frac{K}{[R]}\right)} \,.\, \sin\left(\frac{K_2}{N}\right),$$

som indsat i (39) giver:

$$\sin \theta = [R] \sin\left(\frac{K}{[R]}\right) \,.\, \frac{\sin z}{N_1 \cos \lambda_1},$$

hvilket er den tidligere Formel (33), hvor Værdien for T er indsat ifølge (30). Efter at man saaledes paa en heelt forskjellig Vei er bleven ført tilbage paa den directe sphæroidiske Bestemmelse af Længdedifferentsen, har nu selve Rækkeudviklingen ikke længere nogensomhelst Vanskelighed. Indtil Led af 4de Orden incl. kan man aabenbart skrive:

$$\theta = \frac{\sin z}{\cos \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right) - \tfrac{1}{6}\frac{\sin z}{\cos \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right)\left(\frac{K}{[R]}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\frac{\sin^3 z}{\cos^3 \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right)^3$$

idet man endogsaa uden videre kan ombytte $[R]$ med R, da denne Forandring kun medfører Tilføielsen af et Led af 5te Orden. Men ifølge (4) haves med den her fordrede Nøiagtighed:

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 (1 + 2\, e^2 \cos^2 z \cos^2 \lambda)$$

og man faaer saaledes:

$$\left.\begin{aligned} \theta = \frac{\sin z}{\cos \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right) - \tfrac{1}{6}\frac{\sin z}{\cos \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\frac{\sin^3 z}{\cos^3 \lambda_1}\left(\frac{K}{N_1}\right)^3 \\ - \tfrac{1}{3}\cos^2 \lambda \cos^2 z \frac{\sin z}{\cos \lambda_1} \,.\, e^2 \left(\frac{K}{N_1}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

hvor man endnu i alle Led af 3die og 4de Orden efter Behag kan ombytte N og N_1, da Differentsen mellem disse Størrelser er af 2den Orden.

§ 20.

Den samme sphæriske Triangel AB_2P_2 giver endvidere:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(z_2 - z) = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}\theta \,.\, \frac{\cos \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda)}{\sin \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda)};$$

men da her $z_2 = z_1 + \delta$ og $\lambda_2 = \lambda_1 - \psi$, saa falder ogsaa denne Formel fuldstændigt sammen med den tidligere i § 17 behandlede, og man ledes da atter tilbage paa Azimuthets Bestemmelse ved Formel (34), ifølge hvilken:

$$z_1 = z + 180^\circ - \zeta$$

$$\text{og } \tang \tfrac{1}{2}\zeta = \tang \tfrac{1}{2}\theta \,.\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)},$$

hvor man indtil Led af 4de Orden incl. kan sætte:

$$\zeta = \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)}\theta + \tfrac{1}{12}\frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)}\theta^3 - \tfrac{1}{12}\left(\frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)}\right)^3 \theta^3.$$

Da man imidlertid i sidste Leds Nævner kan ombytte $(\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda))^3$ med $\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)$, hvilket kun frembringer Forandring i Leddene af 5te Orden, saa haves endnu simplere:

$$\zeta = \frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)}.\theta + \tfrac{1}{12}\frac{\sin \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)}{\cos \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda)}.\cos^2\left(\frac{\lambda_1 + \lambda}{2}\right).\theta^3 \quad . \; . \; (41)$$

§ 21.

Gaae vi nu over til at betragte den directe sphæroidiske Løsning, saa staae af de hertil svarende Formler kun (32) tilbage. I denne vil det først og fremmest være hensigtsmæssigt at give venstre Side en noget forskjellig og for Rækkeudviklingen beqvemmere Form. Indfører man saaledes istedetfor Meridianbuen $L = CB$ den i Udgangspunktet C tangerende Cirkel, hvis Radius er $[M]$, saa vil denne Cirkel, der indeholder selve Punktet B, umiddelbart give Ligningen:

$$[M]\left\{\sin\left(\lambda + \frac{L}{[M]}\right) - \sin\lambda\right\} = p, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (42)$$

der kan ansees som en Omskrivning af (32). For Udviklingen af L i Række efter stigende Potentser af p har man ifølge *Maclaurin:*

$$L = (1)_0 p + (2)_0 \frac{p^2}{1.2} + (3)_0 \frac{p^3}{1.2.3} + (4)_0 \frac{p^4}{1.2.3.4} \quad . \; . \; . \; (43)$$

idet man atter her har udeladt første Led, da $L_0 = 0$, og betegnet Differentialcoefficienterne af L med Hensyn til p paa den tidligere i § 18 benyttede Maade.

Ved successiv Differentiation af (42), hvor L betragtes som afhængig og p som uafhængig Variabel medens λ og $[M]$ ere constante, erholdes Ligningerne:

$$\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(1)=1.$$

$$\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(2)-\frac{1}{[M]}\sin\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(1)^2=0$$

$$\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(3)-\frac{3}{[M]}\sin\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(2).(1)-\frac{1}{[M]^2}.\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(1)^3=0$$

$$\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(4)-\frac{4}{[M]}\sin\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(3).(1)-\frac{6}{[M]^2}.\cos\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(2).(1)^2$$
$$-\frac{3}{[M]}\sin\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(2)^2+\frac{1}{[M]^3}.\sin\left(\lambda+\frac{L}{[M]}\right).(1)^4=0,$$

som for $p=0$ give:

$$(1)_0=\frac{1}{\cos\lambda};\quad (2)_0=\frac{1}{[M]}.\frac{\tang\lambda}{\cos^2\lambda};\quad (3)_0=\frac{1+3\tang^2\lambda}{[M]^2.\cos^3\lambda};$$
$$(4)_0=\frac{9\tang\lambda+15\tang^3\lambda}{[M]^3.\cos^4\lambda}.$$

Og indsættes disse Værdier i (43) erholdes:

$$\left.\begin{aligned}L=\frac{p}{\cos\lambda}+\frac{\tang\lambda}{2[M]}.\left(\frac{p}{\cos\lambda}\right)^2+\frac{1+3\tang^2\lambda}{6[M]^2}.\left(\frac{p}{\cos\lambda}\right)^3\\+\frac{3\tang\lambda+5\tang^3\lambda}{8[M]^3}\left(\frac{p}{\cos\lambda}\right)^4\end{aligned}\right\}\quad\ldots(44)$$

Men ifølge (31) haves:

$$\frac{p}{\cos\lambda}=-T\cos z-u\tang\lambda,$$

og indføres heri atter Værdierne for T og u efter (30) og (29), idet man tillige udvikler Sinusserne i Række indtil Leddene af 4de Orden incl., saa faaes:

$$\frac{p}{\cos\lambda}=-\cos z.K-\tfrac{1}{2}\tang\lambda.K\frac{K}{[R]}+\tfrac{1}{6}\cos z.K\left(\frac{K}{[R]}\right)^2+\tfrac{1}{24}\tang\lambda.K\left(\frac{K}{[R]}\right)^3$$

som substitueret i (44) giver for Rækkeudviklingen af L følgende Led af de forskjellige Ordener, nemlig:

af 1ste Orden:

$$-\cos z.K;$$

af 2den Orden:

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\lambda\,.\,K\frac{K}{[R]}+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\lambda\cos^2 z\,.\,K\frac{K}{[M]};$$

af 3die Orden:

$$+\tfrac{1}{6}\cos z\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)^2+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\lambda\cos z\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)\left(\frac{K}{[M]}\right)$$

$$-\frac{1+3\operatorname{tang}^2\lambda}{6}\cos^3 z\,.\,K\left(\frac{K}{[M]}\right)^2;$$

af 4de Orden:

$$+\tfrac{1}{24}\operatorname{tang}\lambda\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)^3-\tfrac{1}{6}\operatorname{tang}\lambda\cos^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)^2\left(\frac{K}{[M]}\right)$$

$$+\tfrac{1}{8}\operatorname{tang}^3\lambda\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)^2\left(\frac{K}{[M]}\right)-\frac{1+3\operatorname{tang}^2\lambda}{4}\,.\operatorname{tang}\lambda\cos^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{[R]}\right)\left(\frac{K}{[M]}\right)^2$$

$$+\frac{3\operatorname{tang}\lambda+5\operatorname{tang}^3\lambda}{8}\,.\cos^4 z\,.\,K\left(\frac{K}{[M]}\right)^3.$$

Men da man i Leddene af 4de Orden, uden at formindske Nøiagtigheden, ikke blot kan ombytte $[R]$ og $[M]$ med R og M, men endogsaa med N, saa skrives disse Led simplere:

$$+\tfrac{1}{24}\operatorname{tang}\lambda\Big\{1-4\cos^2 z+3\operatorname{tang}^2\lambda-6\,(1+3\operatorname{tang}^2\lambda)\cos^2 z$$
$$+3\,(3+5\operatorname{tang}^2\lambda)\cos^4 z\Big\}K\left(\frac{K}{N}\right)^3$$

eller endnu simplere:

$$+\tfrac{1}{24}\operatorname{tang}\lambda\sin^2 z\Big\{1+3\operatorname{tang}^2\lambda-3\cos^2 z(3+5\operatorname{tang}^2\lambda)\Big\}K\left(\frac{K}{N}\right)^3.$$

I Leddene af 3die Orden vil det ligeledes være tilladt at ombytte $[R]$ med R og $[M]$ med M, da herved kun fremstaaer Forandring i Leddene af 5te Orden. Man har endvidere:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{N}(1+e^2\cos^2 z\,.\cos^2\lambda)\ \text{og}\ \frac{1}{M}=\frac{1}{N}(1+e^2\cos^2\lambda).$$

Den fortsatte Ombytning af R og M med N vil saaledes medføre Tilføielsen af følgende Led af 4de Orden:

$$+\Big\{\tfrac{1}{3}\cos^3 z\cos^2\lambda+\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\lambda\cos z(\cos^2 z\cos^2\lambda+\cos^2\lambda)-\frac{1+3\operatorname{tang}^2\lambda}{3}\cos^3 z\cos^2\lambda\Big\}e^2K\left(\frac{K}{N}\right)^2$$

som kan sammendrages i dette ene:

$$+\tfrac{1}{2}\sin^2\lambda\cos z\sin^2 z\,.\,e^2K\left(\frac{K}{N}\right)^2$$

og selve Leddene af 3die Orden kunne nu skrives:

$$+\frac{1+3\,\mathrm{tang}^2\lambda}{6}\cos z\sin^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{N}\right)^2.$$

Sætter man endelig i Leddene af 2den Orden:

$$\frac{1}{[R]}=\frac{1}{R}(1+\omega_1)\quad\text{og}\quad\frac{1}{[M]}=\frac{1}{M}(1+\omega_2),$$

hvor ω_1 og ω_2 vides at være Størrelser af 2den Orden, saa vil Ombytningen af $[R]$ med R og $[M]$ med M fordre Tilføielsen af 4de Ordens Leddene:

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\,.\,\omega_1 K\left(\frac{K}{R}\right)+\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\cos^2 z\,.\,\omega_2 K\frac{K}{M},$$

som simplere skrives:

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\,(\omega_1-\cos^2 z\,.\,\omega_2)K\left(\frac{K}{N}\right).$$

Da man ifølge (4) med fuldstændig Skarphed har:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{N}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2 z\cos^2\lambda\right)\quad\text{og}\quad\frac{1}{M}=\frac{1}{N}\left(1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\lambda\right),$$

$$\text{altsaa:}\quad\frac{K}{R}-\frac{K}{M}\cos^2 z=\frac{K}{N}\sin^2 z,$$

saa reduceres nu ogsaa Leddene af 2den Orden til:

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\sin^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{N}\right),$$

og efter Alt, hvad der ovenfor er bleven udviklet, faaer man da for L Rækken:

$$\left.\begin{aligned}L=-\cos z\,.\,K-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\,\lambda\sin^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{N}\right)+\frac{1+3\,\mathrm{tang}^2\lambda}{6}\cos z\sin^2 z\,.\,K\left(\frac{K}{N}\right)^2\\+\tfrac{1}{24}\mathrm{tang}\lambda\sin^2 z\left\{1+3\,\mathrm{tang}^2\lambda-3\cos^2 z(3+5\,\mathrm{tang}^2\lambda)\right\}K\left(\frac{K}{N}\right)^3\\+\tfrac{1}{2}\sin^2\lambda\cos z\sin^2 z\,.\,e^2K\left(\frac{K}{N}\right)^2-\tfrac{1}{2}\mathrm{tang}\lambda\,(\omega_1-\cos^2 z.\omega_2)K\left(\frac{K}{N}\right)\end{aligned}\right\}(45)$$

hvor det endnu staaer tilbage at bestemme de ubekjendte Størrelser ω_1 og ω_2.

§ 22.

Efterat vi saaledes have seet, at det til Bestemmelsen af samtlige 4de Ordens Led i Rækken for L er nødvendigt at kjende selve Udtrykket for $[R]$, hvori naturligviis ogsaa $[M]$ er indbefattet, skulle vi paany gjenoptage den i § 9 begyndte Udvikling af denne Størrelse. I dette Øiemed ville vi da først søge Ligningen for den ved Verticalsnittet gjennem A frembragte Ellipse, idet Curven henføres til et polart Coordinatsystem, hvis Pol er selve Punktet A, medens Tangenten i A er den faste Axe, med hvilken Polarordinaten r danner Vinklen v. For at fremkalde et tydeligt Billede ville vi endnu forudsætte, at Snittets Azimuth z er beliggende i 2den Qvadrant, altsaa $l_1 > l$, hvilket medfører, at man i Ligning (6) maa gjøre Brug af det øverste Tegn*) og sætte:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R}\left(1 - \tfrac{3}{2}\varepsilon^2 \frac{S}{R} \sin 2l\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Transformeres den almindelige Ligning for Ellipsen:

$$\frac{y^2}{b_1^2} + \frac{x^2}{a_1^2} = 1\,,$$

idet Begyndelsespunktet henlægges i A, hvis Coordinater ere $-x_0$ og $+y_0$, saa faaes:

$$\frac{(y + y_0)^2}{b_1^2} + \frac{(x - x_0)^2}{a_1^2} = 1$$

eller:

$$(y^2 + 2yy_0) + (1 - \varepsilon^2)(x^2 - 2xx_0) = 0$$

og indføres heri Værdierne:

$$y \;= r\cos(l + v)\,; \qquad x \;= r\sin(l + v)$$
$$y_0 = N(1 - \varepsilon^2)\,\sin l\,; \quad x_0 = N\cos l$$

erholdes Ligningen:

$$r\left\{1 - \varepsilon^2\sin^2(l+v)\right\} - 2N(1-\varepsilon^2)\left\{\sin(l+v)\cos l - \cos(l+v)\sin l\right\} = 0$$

eller:

$$r = \frac{2N(1 - \varepsilon^2)\sin v}{1 - \varepsilon^2\sin^2(l+v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Den Cirkel, der tangerer Ellipsen i A og tillige indeholder det

*) I den citerede Formel er ved en Trykfeil sat $\pm$ istedetfor $\mp$.

ved Polarcoordinaterne r og v bestemte Endepunkt af Buen S, har aabenbart Radien: $\frac{r}{2\sin v}$. Man har altsaa:

$$\frac{1}{[R]} = \frac{2\sin v}{r}$$

og ifølge (47):

$$\frac{1}{[R]} = \frac{1-\varepsilon^2\sin^2(l+v)}{N(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1-\varepsilon^2\sin^2(l+v)}{1-\varepsilon^2\sin^2 l}\right)$$

eller naar man af Rækkeudviklingen kun bevarer Led af 2den Orden:

$$\frac{1}{[R]} = \frac{1}{R}(1-\varepsilon^2 v\,.\,\sin 2l) = \frac{1}{R}\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\frac{S}{[R]}\sin 2l\right)$$

og med samme Nøiagtighed:

$$\frac{1}{[R]} = \frac{1}{R}\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\frac{S}{R}\sin 2l\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

hvilket, sammenholdt med (46), giver det mærkelige Resultat, at $[R]$ er selve Krumningsradien i Endepunktet af Buen $\frac{1}{3}S$.

§ 23.

For i (48) at kunne udtrykke ε^2 og l ved Problemets oprindelige Givne: e^2, λ og z, ville vi betragte den retvinklede sphæriske Triangel, der dannes af Sphæroidens Æquatorplan i Forbindelse med Meridianplanen for Punktet A og den i samme Punkt under Azimuthet z fastlagte Verticalplan. Den i Meridianplanen liggende Cathete er aabenbart λ, Hypothenusen l, og den mellem disse Sider liggende Vinkel $(180°-z)$, ligesom den ligeoverfor Catheten λ liggende Vinkel, som vi betegne med t, er selve Skjæringsvinklen mellem Verticalplanen og Æquatorplanen. Man har derfor umiddelbart Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} \tan l &= -\frac{\tan\lambda}{\cos z} \\ \cos t &= \cos\lambda\sin z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Af den første følger atter:

$$\frac{\tang l}{1+\tang^2 l} = \sin l \cos l = -\frac{\tang\lambda \cos z}{\cos^2 z + \tang^2\lambda} = -\frac{\sin\lambda\cos\lambda\cos z}{1-\cos^2\lambda\sin^2 z}$$

eller:

$$\sin 2l = -\frac{\sin 2\lambda \cos z}{1-\cos^2\lambda \sin^2 z}$$

og erindres det, at ε^2 er bestemt ved den Ellipse, der fremstaaer, naar Sphæroiden skjæres med en Plan gjennem Centret, parallel med Verticalplanen og altsaa dannende Vinklen t med Æquatorplanen, saa vil det ogsaa være let at finde et Udtryk for denne Størrelse. I den nævnte Ellipse, hvis store Halvaxe er a, bestemmes nemlig den lille Halvaxe r ved i den almindelige Ligning for de elliptiske Meridianer:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

at sætte $y = r \sin t$ og $x = r\cos t$. Altsaa:

$$r^2 = \frac{a^2(1-e^2)}{1-e^2\cos^2 t}$$

og

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{r^2}{a^2} = \frac{e^2\sin^2 t}{1-e^2\cos^2 t}$$

eller ifølge (49):

$$\varepsilon^2 = e^2\frac{1-\cos^2\lambda\sin^2 z}{1-e^2\cos^2\lambda\sin^2 z}.$$

Ved at multiplicere dette Udtryk for ε^2 med det ovenfor fundne for $\sin 2l$ erholdes:

$$\varepsilon^2 \sin 2l = -e^2\frac{\sin 2\lambda\cos z}{1-e^2\cos^2\lambda\sin^2 z}$$

eller med den her fordrede Nøiagtighed:

$$\varepsilon^2\sin 2l = -e^2\sin 2\lambda\cos z,$$

og indsættes denne Værdie i (46) og (48) fremstaae Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{R_s} &= \frac{1}{R}\left(1+\tfrac{3}{2}e^2\frac{S}{R}\sin 2\lambda\cos z\right) \\ \frac{1}{[R]} &= \frac{1}{R}\left(1+\tfrac{1}{2}e^2\frac{S}{R}\sin 2\lambda\cos z\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (50)$$

At disse Formler ere gjældende i alle Tilfælde og ikke bundne til den specielle ovenfor gjorte Forudsætuing om Værdien af z, kan man let eftervise. Var saaledes z beliggende i 4de Qvadrant, følgelig $l_1 < l$, saa vilde man vel i Formlerne (46) og (48) have erholdt Tegnet $+$ istedetfor $-$, men til Gjengjæld vilde da ogsaa, i den betragtede retvinklede Triangel, Udtrykket for Vinklen mellem Catheten λ og Hypothenusen l ikke længere have været $(180° - z)$ men $(360° - z)$, hvorved atter Formlerne (49) og Udtrykket for $\sin 2l$ havde skiftet Tegn, og det endelige Resultat var saaledes paany bleven fremstillet ved (50). Da der endvidere til enhver Stilling af Snittet i 1ste og 3die Qvadrant svarer en ved samme Værdie af $\cos z$ bestemt, med Hensyn til Meridianen fuldkommen symmetrisk, Stilling i 4de og 2den Quadrant, saa har man derved allerede godtgjort den almindelige Gyldighed af Formlerne (50), i hvilke det stedse bør erindres, at S ligesom R kun ere numeriske Værdier, medens selve Tegnet bestemmes ved $\cos z$.

§ 24.

Anvendelsen af (50) paa Bestemmelsen af ω_1 i (45) har ingen Vanskelighed, idet man ligefrem faaer:

$$\frac{1}{[R]} = \frac{1}{R}\left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K}{R} \sin 2\lambda \cos z\right);$$

altsaa:

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K}{R} \sin 2\lambda \cos z.$$

Ved Bestemmelsen af ω_2 vil man derimod for $\cos z$ enten maatte sætte $+1$, eller -1, eftersom B ligger Syd eller Nord for A. Erindres det imidlertid, at det numeriske Udtryk for Meridianbuen L i første Tilfælde er $+\cos z \,.\, K$, og i sidste derimod $-\cos z \,.\, K$, saa sees det, at man dog stedse faaer:

$$\frac{1}{[M]} = \frac{1}{M}\left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K}{M} \sin 2\lambda \cos z\right);$$

altsaa:

$$\omega_2 = \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K}{M} \sin 2\lambda \cos z.$$

Men da man i Led af 4de Orden kan ombytte R og M med N, bliver følgelig med den her fordrede Nøiagtighed:

$$\omega_1 = \omega_2 = \tfrac{1}{2} e^2 \frac{K}{N} \sin 2\lambda \cos z\,,$$

som indført i (45) reducerer sidste Led til:

$$-\tfrac{1}{4} \operatorname{tang}\lambda \sin 2\lambda \cos z \sin^2 z \,.\, e^2 K \left(\frac{K}{N}\right)^2 = -\tfrac{1}{2} \sin^2\lambda \cos z \sin^2 z \,.\, e^2 K \left(\frac{K}{N}\right)^2$$

eller nøiagtigt til det næstsidste Led med modsat Tegn. Disse Led hæve saaledes fuldstændigt hinanden, og (45) giver da identisk det samme Udtryk for L, som man alt tidligere, ifølge (37), har fundet for Størrelsen $N\varDelta_2$. Herved erholdes da ogsaa en smuk Bekræftelse paa Rigtigheden af den ved (20) fremstillede mærkelige Ligning:

$$L = N\varDelta_2\,,$$

der i § 14, støttet paa ganske andre Betragtninger, er bleven viist at være nøiagtig indtil Led af 4de Orden incl.

Naar man først for L har fundet samme Række som for $N\varDelta_2$, saa vil man naturligviis ogsaa for $\varDelta$, bestemt ved (18), erholde nøiagtigt den tidligere Række (38), og Problemets fuldstændige Løsning, hvad enten man gaaer ud fra den sphæriske eller fra den directe sphæroidiske Behandling, vil saaledes stedse være givet ved Rækkerne: (38), (40) og (41).

§ 25.

Ved første Øiekast kunde det nu vel synes, at de ovennævnte Rækker, og da især den første af disse, vare saa complicerede, at deres Anvendelse ved de søgte Størrelsers numeriske Bestemmelse maatte blive vidtløftig og ubeqvem. Men dette er imidlertid langtfra Tilfældet, og det er tvertimod let paa forskjellige Maader at omskrive dem saaledes, at Regningen endogsaa bliver overraskende simpel, hvilket tilstrækkeligt vil fremgaae af de særlige Løsninger, som vi nu skulle udvikle.

I Rækken (38) vil det i Leddet af 2den Orden være tilladt at ombytte M_m med M, naar man atter, ifølge Ligningen:

$$\frac{1}{M_m} = \frac{1}{M}\left(1 + \tfrac{3}{4} e^2 \frac{K}{M} \sin 2\lambda \cos z\right),$$

tilføier Leddet af 4de Orden: $-\tfrac{3}{4}\sin^2\lambda \sin^2 z \cos z \,.\, e^2\left(\frac{K}{M}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2$.

Det sees da let, at man med fuldstændig Bevarelse af Nøiagtigheden indtil Led af 4de Orden incl. kan skriveUdtrykket for $\varDelta$ paa følgende Maade:

$$\varDelta = -(s + \sigma),$$

naar man tillige sætter:

$$s = \cos z \,.\, \frac{K}{\varrho M_m}\left\{1 - \left(\frac{1+3\tang^2\lambda}{6} - \frac{3\sin^2\lambda}{4} e^2\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z - \tfrac{1}{8}\cos 2\lambda . e^2\left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 z\right\}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\tang\lambda \sin^2 z \,.\, \frac{K}{\varrho M}\cdot\frac{K}{N}\left\{1 - \left(\frac{3+5\tang^2\lambda}{4}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z + \left(\frac{2+3\tang^2\lambda}{3}\right)\left(\frac{K}{N}\right)^2\right\}$$

hvor der paa Ligningernes høire Sider endnu er divideret med Factoren ϱ, idet vi saavel ved denne som ved de følgende Løsninger forudsætte, at $\varDelta$, ligesom ogsaa θ og ζ, skulle angives i Secunder. De indenfor Klammerne staaende Størrelser ere saa nær Eenheden, at Forskjellen kun er af 2den Orden, og det vil saaledes være overmaade let at danne Udtryk for $\log s$ og $\log\sigma$, da man ved Udviklingen af Klammerstørrelsernes Logarithmer kun behøver at medtage Rækkernes allerførste Led. Angiver μ de briggiske Logarithmers Modulus, og indfører man følgende Betegnelser for de forskjellige af Breden alene afhængige Factorer, nemlig:

$$[1] = \frac{1}{\varrho M}$$

$$[2] = \frac{1}{\varrho N}$$

$$[3] = \frac{\tang\lambda}{2\varrho MN}$$

$$[4] = \left(\frac{1 + 3\tang^2\lambda}{6} - \frac{3 e^2 \sin^2\lambda}{4}\right)\frac{\mu}{NN}$$

$$[5] = -\frac{e^2\cos 2\lambda}{8}\,.\,\mu\varrho\varrho$$

$$[6] = \left(\frac{3 + 5\,\mathrm{tang}^2\lambda}{4}\right)\frac{\mu}{NN}$$

$$[7] = \left(\frac{2 + 3\,\mathrm{tang}^2\lambda}{3}\right)\frac{\mu}{NN}$$

saa erholdes derfor Ligningerne:

$$\log s = \log\left\{[1]_m \,.\, K\cos z\right\} - [4]\,.\,K^2\sin^2 z + [5]\,.\,[1]_m^2\,.\,K^2\cos^2 z$$

$$\log\sigma = \log\left\{[3]\,.\,K^2\sin^2 z\right\} - [6]\,.\,K^2\sin^2 z + [7]\,.\,K^2,$$

hvor Mærket ved Foden af [1] angiver, at denne Factor svarer til Middelbreden, eller til Argumentet $\lambda + \frac{\varDelta}{2}$, medens alle de øvrige umærkede Factorer svare til selve λ.

Rækkerne (40) og (41) kunne skrives saaledes:

$$\theta = [2]_1\,.\,\frac{K\sin z}{\cos\lambda_1}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{K\sin z}{N_1\cos\lambda_1}\right)^2 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N_1}\right)^2 - \frac{e^2\cos^2\lambda}{3}\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z\right\}$$

$$\zeta = \theta\,.\,\frac{\sin\lambda_m}{\cos\frac{\varDelta}{2}}\left\{1 + \tfrac{1}{12}\theta^2\,.\,\cos^2\lambda_m\right\}$$

idet Mærket ved Foden af [2] angiver, at Factoren svarer til Breden λ_1. Indfører man Betegnelsen:

$$\theta_0 = [2]_1\,.\,K\sin z\sec\lambda_1$$
$$c = \tfrac{1}{12}\mu\varrho\varrho$$

og tillige:

$$[8] = \frac{e^2\cos^2\lambda}{6}\mu\varrho\varrho,$$

saa erholdes paa lignende Maade som ovenfor:

$$\log\theta = \log\theta_0 + 2c\,.\,\theta_0^2 - 2c\,.\,[2]_1^2 K^2 - 2[8]\,.\,[1]_m^2\,.\,K^2\cos^2 z$$

$$\log\zeta = \log\left\{\theta\sin\lambda_m\sec\frac{\varDelta}{2}\right\} + c\,.\,\theta^2\cos^2\lambda_m,$$

og Problemets fuldstændige Løsning kan da i Henhold til det Foregaaende gives samlet ved følgende simple Formler:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta &= -(s+\sigma)\\
z &= 180^\circ + z - \zeta\\
u = K\sin z\,; \quad u_1 &= [2]_1\,u\,; \quad K_1 = [2]_1\,K\\
s_0 &= [1]_m\,.\,K\cos z\\
\sigma_0 &= [3]\,.\,uu\\
\theta_0 &= u_1 \sec\lambda_1\\
\zeta_0 &= \theta\sin\lambda_m \sec\frac{\varDelta}{2}
\end{aligned}\right\}\;\ldots (51)$$

$$\left.\begin{aligned}
\log s &= \log s_0 - [4]\,uu + [5]\,s_0\,s_0\\
\log\sigma &= \log\sigma_0 - [6]\,uu + [7]\,KK\\
\log\theta &= \log\theta_0 + 2\,c\,\theta_0\,\theta_0 - 2\,c\,K_1K_1 - 2[8]\,s_0s_0\\
\log\zeta &= \log\zeta_0 + c\,\theta_0\theta_0\,\cos\lambda_m\,\cos\lambda_m
\end{aligned}\right\}\;\ldots (52)$$

hvor det turde være overflødigt at bemærke, at s, σ, s_0, σ_0 og θ_0 vel ere analoge, men ikke identiske med de tidligere i § 15 paa samme Maade betegnede Størrelser.

§ 26.

Formlerne (51) og (52), ved hvis Dannelse alle Led af 4de Orden ere bevarede, have saa stor Skarphed, at de egenlig, selv for Værdier af K paa 200000 til 250000 Fod, maa forudsætte Anvendelsen af Logarithmer med 8 Decimaler. Naar Regningen føres med syvziffrede Tavler, saaledes som det tidligere er viist stedse at burde finde Sted, vil allerede herved en Simplification blive tilladelig. Leddet: $[5]\,s_0s_0$, der for $\frac{K}{N} = \frac{1}{100}$ og for alle Breder mellem 30° og 60° er mindre end 2 Eenheder af ottende Decimal, bør da ganske udelades, og $\cos\lambda_m$ i sidste Formel ombyttes med $\cos\lambda_1$, idet denne Forandring kun medfører Bortkastelsen af et Led af 4de Orden: $-\frac{\mu}{12}\left(\frac{K}{N}\right)^3 \sin^2 z\,\cos z\,\tang\lambda_1$, som i hvert Fald er mindre end

$\frac{\tan g\,\lambda_1}{7}$ Eenheder af syvende Decimal. Formlerne (52) blive da at skrive paa følgende Maade:

$$\left.\begin{aligned}\log s &= \log s_0 - [4]\,uu \\ \log \sigma &= \log \sigma_0 - [6]\,uu + [7]\,KK \\ \log \theta &= \log \theta_0 + 2\,c\,\theta_0\theta_0 - 2\,c\,K_1K_1 - 2\,[8]\,s_0s_0 \\ \log \zeta &= \log \zeta_0 + c\,u_1u_1\end{aligned}\right\}\quad . . (53)$$

og det er nu vistnok aabenbart, at den saaledes fremstillede Løsning kun fordrer en overmaade simpel Regning. Ved Formlerne (51) findes umiddelbart et System af approximerede Værdier for de søgte Størrelsers Logarithmer, og disse forandres dernæst til fuldkommen skarpe ved Hjælp af (53), der med største Lethed bestemme de forskjellige Rettelser. Løsningen har forsaavidt ganske samme Charakteer som den bekjendte, der angives af *Gauss* i: »Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Zweite Abhandlung« pag. 30, men den besidder tillige fremfor denne sidste det ikke uvæsentlige Fortrin, at være saagodtsom udelukkende *directe*, idet man kun paa eet eneste Sted, nemlig ved Bestemmelsen af s_0, gjør Brug af en Størrelse, der først maa fastsættes ved et Skjøn og senere rettes efter den for $\varDelta$ fundne Værdie. Bemærkes det imidlertid, at Logarithmen for Factoren [1] varierer saa langsomt, at selv det løseste Skjøn maa indskrænke Usikkerheden til dens sidste Decimaler, som ikke kunne yttre nogensomhelst Indflydelse paa Gjennemførelsen af hele den øvrige Regning, saa vil den paapegede Ulempe erkjendes at være mere tilsyneladende end virkelig og i Regelen reducere sig til, at man først efterat have opslaaet σ og de hele Secunder i s benytter disse Størrelser til Bestemmelsen af de to sidste Decimaler i $\log [1]_m$, der da uden videre Rettelse give den definitive Værdie af $\log s$. Overhovedet vil man neppe danne sig nogen rigtig Forestilling om Regningens Beskaffenhed, forinden man i Enkelthederne har gjennemgaaet dens numeriske Udførelse og nøiere betragtet det Apparat af Hjælpetavler, der give de forskjellige af Breden afhængige Factorer. Kun for tvende af disse, [1] og [2], behøve Logarithmerne at fremstilles med 7 Decimaler. For [3] og [4] ville derimod respective 5 og 4, for [6] og [7] kun 2 og for [8] og [5], forsaavidt man nogensinde vil medtage denne sidste Størrelse, endogsaa kun 1 Decimal være fuldkommen tilstrækkelige. Samtlige Logarithmer variere tillige saa langsomt, at man ret vel kan indskrænke sig til Tavler, hvis Argument gaaer fra 10 til 10 Minutter. Selv ved saadanne vil endnu al Interpolation bortfalde for de 4 sidste Factorers Vedkommende, hvorom man lettest overbeviser sig ved at kaste et Blik paa de Tavler, der ere vedføiede Slutningen af nærværende Afhandling, og hvoraf den første paa mindre end een Octavside giver Apparatet fuldstændigt for de 5 Bredegrader, der omfatte hele det danske Monarchie. Længdeeenheden er for begge Tavler den franske Toise, der udelukkende anvendes ved Gradmaalingens Arbeider, og Bestemmelsen af Sphæroidens Størrelse og Form er den samme, som benyttes ved Generalstabens »Kaart over Danmark«, hvor Aplatissementet er antaget at være $\frac{1}{300}$ og Middelgraden 57010 Toiser. Da det ved Beregningen af de logarithmiske Correctioner er beqvemt strax at erholde Resultaterne udtrykte i Eenheder af Logarithmernes sidste Decimal, saa har man ogsaa ved Fremstillingen af Factorerne [4], [5], [8], [6] og [7] taget Hensyn hertil, idet man har multipliceret de tre første, ligesom ogsaa Constanten c, med 10^7, de to sidste derimod med 10^5. Uagtet samtlige Factorer selv efter denne Multiplication vedblive at være ægte Brøker og altsaa, ligesom [1], [2] og [3], have Logarithmer, der alle ere negative, saa ere disse dog i Tavlerne opførte paa sædvanlig Maade som positive, idet man overalt har tilføiet 10 laante Eenheder. At log [8] er givet med 2 og ikke med 1 Decimal, beroer paa en senere Anvendelse af Factoren, hvorved denne Nøiagtighed bliver nødvendig (§ 29).

§ 27.

Vi skulle nu vise Formlernes Anvendelse paa Beregningen af det tidligere i § 16 behandlede Exempel, hvor de givne Størrelser ere:

$$\lambda = 51^\circ\, 48'\, 1'',9294$$
$$z = 5^\circ\, 42'\, 21'',7699$$
$$\log K = 5,0251757,$$

idet man her tillige har $\log [1]_m = 8,5100716$.

Først opslaaes:

$$\log \cos z = 9,9978427\,; \quad \log \sin z = 8,9974946,$$

og man faaer saaledes:

$$\log s_0 = 3,5330900\,; \quad \log u = 4,0226703.$$

Ved Hjælp af Argumentet λ findes dernæst:

$$\log [3] = 1,50757$$
$$\log [4] = 3,0140$$
$$\log [6] = 1,47$$
$$\log [7] = 1,39$$
$$\log [8] = 2,6,$$

og man har da:

$$\log \sigma_0 = 9,55291$$
$$\log [4]uu = 1,0593; \quad \log [6]uu = 9,52; \quad \log [7]KK = 1,44.$$

altsaa: $\quad [4]uu = 11,46; \quad [6]uu = 0,33; \quad [7]KK = 27,5.$

Correctionerne, der blive at tilføie $\log s_0$ og $\log \sigma_0$, ere følgelig respective: —11 og +27, hvorved:

$$\log s = 3,5330889\,; \quad s = 3412'',6276$$
$$\log \sigma = 9,55318 \qquad \sigma = 0'',3574.$$

Og hermed er da fundet:

$$\Delta = -\ 56'\, 52'',9850$$
$$\lambda_1 = 50^\circ 51'\ \ 8'',9444$$
$$\lambda_m = 51^\circ 19'\, 35'',4369.$$

For at bestemme θ søges nu:

$$\log [2]_1 = 8,5089454\,; \quad \log \sec \lambda_1 = 0,1997510,$$

der give:

$$\log u_1 = 2{,}5316157\,; \quad \log K_1 = 3{,}5341$$

og $\qquad \log \theta_0 = 2{,}7313667,$

idet man tillige faaer:

$$\log c\theta_0\theta_0 = 0{,}3925\,; \ \log cK_1K_1 = 1{,}9980\,; \ \log [8].s_0s_0 = 9{,}7$$

eller: $\quad c\theta_0\theta_0 = 2{,}47\,; \quad cK_1K_1 = 99{,}54\,; \quad [8]\,s_0s_0 = 0{,}50.$

Correctionen for $\log \theta_0$ er saaledes $= -195$, og

$$\log \theta = 2{,}7313472.$$

Opslaaer man endnu:

$$\log \sin \lambda_m = 9{,}8924951\,; \ \log \sec \frac{\varDelta}{2} = 0{,}0000149$$

$$\log cu_1u_1 = 9{,}9930\,; \quad cu_1u_1 = 0{,}98,$$

har man endelig:

$$\log \zeta_0 = 2{,}6238572,$$

som med Tilføielse af Correctionen $+1$ giver:

$$\log \zeta = 2{,}6238573.$$

Samtlige Værdier, saavel for λ som for $\log \theta$ og $\log \zeta$, stemme nøiagtigt indtil sidste Decimal incl. med de af *Gauss* fundne. Da det bortkastede Led ved Bestemmelsen af Correctionen for $\log s_0$, nemlig $[5]s_0s_0$, selv i nærværende Exempel, hvor ikke blot K har en saa usædvanlig Størrelse, men hvor ogsaa $\cos z$ næsten opnaaer sit Maximum, dog kun voxer til 3 Eenheder af Logarithmens 8de Decimal, vilde dets Bevarelse slet ikke have forandret Resultatet.

§ 28.

Naar Azimuthet i det Foregaaende er fremstillet med samme Skarphed som Breden og Længden, saa er dette nærmest kun skeet for at vise med hvor stor Lethed man ogsaa i denne Henseende fuldstændigt kan opnaae de gauss'iske Formlers Nøiagtighed. Det er imidlertid tidligere blevet fremhævet, at Problemets consequente Behandling nødvendigviis forudsætter, at Approximationerne stedse ved Brede- og Længdedifferentserne føres een Orden videre end ved Azimutherne, hvilket ogsaa allerede med tilstrækkelig Klarhed maa fremgaae af den simple Bemærkning, at Azimutherne bestemmes ved Vinkler, der dannes mellem Linier af 1ste Orden, medens de Vinkler, der bestemme Brede- og Længdedifferentserne, aabenbart dannes af Linier, som maa henføres til Ordenen Nul, eller til samme Klasse som Klodens Axer, Normaler og Krumningsradier. Vil man altsaa standse Rækkerne for Breden og Længden med Leddene af 4de Orden, saa foreligger der aldeles ingen Grund til at fortsætte Rækkeudviklingen for Azimuthet udover Led af 3die Orden, og ved de følgende Løsninger ville vi derfor ogsaa nu stedse for denne Størrelses Vedkommende bortkaste Leddene af høiere Ordener. Det lader sig iøvrigt let eftervise, at ved Azimutherne selv den strenge Bevarelse af samtlige 3die Ordens Led gaaer ud over alle sædvanlige Fordringer, og det er saaledes ogsaa forhen bemærket (§ 11), at man ikke i den geodætiske Praxis pleier at skjelne mellem Retningen af den geodætiske Linie og det gjennem samme Object lagte Verticalsnit, uagtet denne Forskjel, som bekjendt, er en Størrelse af 3die Orden.

Vil man anvende det Udviklede paa selve Formlerne (51), (52) og (53), saa ledes man til at ombytte Udtrykkene for ζ_0 og $\log \zeta$ med følgende:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= \theta \sin \lambda_m \\ \log \zeta &= \log \zeta_0 - \tfrac{1}{2} c u_1 u_1 + \tfrac{3}{2} c K_1 K_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

Man undgaaer herved Bestemmelsen af $\sec \frac{\varDelta}{2}$, idet der kun tilføies et nyt Led: $\frac{3}{2} c K_1 K_1$, af hvilket Størrelsen $c K_1 K_1$ alt findes beregnet ved Længdecorrectionen. I det anførte specielle Exempel vilde denne Forandring give:

$$\log \zeta_0 = 2{,}6238423 \quad \text{og} \quad \log \zeta = 2{,}6238572,$$

der kun i 7de Decimalziffer er een Eenhed forskjellig fra den tidligere fundne Værdie.

Ved den virkelige Benyttelse af Formlerne (51) og (53) vil der i de fleste Tilfælde, hvor Afstandene ikke ere altfor store og hvor den yderste Skarphed maa ansees som overflødig, endogsaa kunne indtræde en langt videre gaaende Simplification, idet man da ved σ og ζ bortkaster alle Correctioner og tillige ved log θ udelader Leddet med Factoren [8]. For Beregningen af sædvanlige Triangulationer af 3die Orden kan selv Udeladelsen af samtlige Rettelser give en tilfredsstillende Løsning, der fremstilles ved Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= -[1]_m K \cos z - [3] K^2 \sin^2 z \\ \theta &= [2]_1 K \sin z \sec \lambda_1 \\ z_1 &= 180 + z - \theta \sin \lambda_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Men hvor meget det end maa erkjendes, at den givne Løsning i praktisk Henseende neppe lader synderligt tilbage at ønske, saa maa det dog stedse fra et mere almindeligt Synspunkt betragtes som en Mangel ved Formlerne (51), (52) og (53), at deres Anvendelse fordrer en forudgaaende Beregning af et ikke ringe Antal Hjelpestørrelser: [1] til [8], hvoraf vistnok enkelte, som [1] og [2], der charakterisere Sphæroidens Krumningsforhold, efter Problemets Natur maae ansees som uundværlige, men hvoraf dog de fleste ingenlunde kunne være absolut fornødne. Denne Mangel, som forøvrigt ogsaa er eiendommelig for den gauss'iske Løsning, kan søges hævet ved en Forandring af Argumenterne for de forskjellige Functioner af Breden, og det er de hertil sigtende Omdannelser af Grundformlerne, som vi nu gaae over til at udvikle.

§ 29.

Naar man i (38) for $\tan^2\lambda$ indfører $\sec^2\lambda - 1$ i Leddet af 3die Orden og tillige i Leddene af 4de Orden omskriver Klammerstørrelsen:

$$\left\{1 + 3 \tan^2\lambda - 3 \cos^2 z\,(3 + 5 \tan^2\lambda)\right\}$$

paa følgende Maade:

$$\begin{aligned} &\left\{1 + 3 \tan^2\lambda \sin^2 z - 3 \cos^2 z\,(3 + 4 \tan^2\lambda)\right\} \\ = &\left\{1 + 3 \tan^2\lambda \sin^2 z + 3 \cos^2 z\right\} - 12 \cos^2 z \sec^2\lambda\,, \end{aligned}$$

saa vil man for Δ have Rækken:

$$\Delta = -\frac{K}{M_m}\cos z\left\{1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z-\tfrac{1}{8}e^2\cos 2\lambda\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}.\frac{K^2\sin^2 z}{M_m N}\left\{\operatorname{tang}\lambda-\left(\frac{K}{N}\right)\cos z\sec^2\lambda+\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z.\operatorname{tang}\lambda\sec^2\lambda\right\}$$
$$+\tfrac{1}{24}.\frac{K^2\sin^2 z}{M_m N}\operatorname{tang}\lambda\left\{1+3\operatorname{tang}^2\lambda\sin^2 z+3\cos^2 z\right\}.\left(\frac{K}{N}\right)^2.$$

Sættes nu til Forkortning og i Analogie med tidligere Betegnelser:

$$s=\frac{K}{N}\cos z\left\{1+\tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z-\tfrac{1}{8}e^2\cos 2\lambda\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z\right\} \;..\; (56)$$

og erindres det, at man har:

$$\operatorname{tang}(\lambda-s)=\operatorname{tang}\lambda-s.\sec^2\lambda+s^2.\operatorname{tang}\lambda\sec^2\lambda+\ldots$$

saa vil denne Ligning udviklet indtil Led af 2den Orden incl. give:

$$\operatorname{tang}(\lambda-s)=\operatorname{tang}\lambda-\left(\frac{K}{N}\right)\cos z\sec^2\lambda+\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z\operatorname{tang}\lambda\sec^2\lambda$$

eller nøiagtigt den ene af de ovenstaaende Klammerstørrelser. Da Ombytningen af $\operatorname{tang}\lambda$ med $\operatorname{tang}(\lambda-s)$ i Led af 4de Orden kun kan frembringe Ændringer af 5te Orden, saa vil man nu endelig for Brededifferentsen indtil Led af 4de Orden incl. have Ligningen:

$$\Delta=-\frac{N}{M_m}(s+\sigma)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(57)$$

idet man sætter:

$$\sigma=\tfrac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z\operatorname{tang}(\lambda-s)\left\{1-\tfrac{1}{12}\left(\frac{K}{N}\right)^2-\tfrac{1}{4}\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z-\tfrac{1}{4}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z\operatorname{tang}^2(\lambda-s)\right\}(58)$$

Indfører man nøiagtigt samme Betegnelser som i § 15, nemlig:

$$r=\frac{K}{\varrho N};\quad s_0=r\cos z;\quad v=r\sin z;\quad t_0=v\operatorname{tang}(\lambda-s)$$

idet man tillige uforandret her som i det Følgende angiver Værdien $\frac{1}{12}\mu\varrho\varrho$ med c, saa faaer man for $\log s$ og $\log\sigma$ Ligningerne:

$$\log s=\log s_0+4crr-4cs_0s_0+[5]s_0s_0$$
$$\log\sigma=\log\left\{\tfrac{1}{2}\varrho v t_0\right\}-crr-3cs_0s_0-3ct_0t_0,$$

hvor s og σ ere udtrykte i Secunder. Man seer da, at s med Undtagelse af et Led af 4de Orden har samme Betydning som i den anførte Paragraph. Med Iagttagelse af den anvendte Nøiagtighed, det vil sige indtil Led af 4de Orden incl., bliver Overeensstemmelsen derimod for t_0 og for σ at betragte som fuldstændig.

For Længdedifferentsen giver Udviklingen af (39)

$$\theta = \frac{K_2}{N} \cdot \frac{\sin z}{\cos \lambda_2}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K_2}{N}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{K_2}{N}\right)^2 \frac{\sin^2 z}{\cos^2 \lambda_2}\right\}$$

Men indtil Led af 3die Orden incl. har man:

$$\lambda_2 = \lambda + \varDelta_2 = (\lambda - s) - \sigma$$

og $\cos\lambda_2 = \cos(\lambda - s) + \sigma \sin(\lambda - s) = \cos(\lambda - s)\left\{1 + \sigma \operatorname{tang}(\lambda - s)\right\}$.

Ifølge § 14 har man tillige:

$$K_2 = K\left\{1 + \tfrac{1}{6} e^2 \varDelta_2^2 \cos^2\lambda\right\}.$$

Indsættes disse Udtryk for $\cos\lambda_2$ og K_2 i Rækken for θ, saa erholdes ved Udviklingen af Leddene indtil 4de Orden incl.

$$\theta = \frac{K \sin z}{N \cos(\lambda - s)}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z \left(\frac{1 - 3\sin^2(\lambda - s)}{\cos^2(\lambda - s)}\right) + \tfrac{1}{6} e^2 \cos^2\lambda \left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 z\right\}$$

$$= \frac{K}{N} \sin z \sec(\lambda - s)\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 z - \tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z \operatorname{tang}^2(\lambda - s) + \tfrac{1}{6} e^2 \cos^2\lambda \left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 z\right\} \quad (59)$$

eller med Benyttelse af de indførte Betegnelser:

$$\log\theta = \log\left\{v \sec(\lambda - s)\right\} - 2 c s_0 s_0 - 4 c t_0 \dot{t}_0 + [8] s_0 s_0 .$$

Endvidere kan Ligningen (41) indtil Led af 3die Orden incl. skrives:

$$\zeta = \theta \frac{\sin\left(\lambda + \frac{\varDelta}{2}\right)}{\cos\frac{\varDelta}{2}}\left\{1 + \tfrac{1}{12}\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z\right\}$$

hvor det, for at bevare samme Nøiagtighed, er tilstrækkeligt at udvikle Factoren $\dfrac{\sin\left(\lambda + \frac{\varDelta}{2}\right)}{\cos\frac{\varDelta}{2}}$ indtil Leddene af anden Orden incl.

Man har følgelig:

$$\lambda + \frac{\varDelta}{2} = (\lambda - s) + \left(s + \frac{\varDelta}{2}\right) = (\lambda - s) + \tfrac{1}{2}(s - s e^2 \cos^2\lambda - \sigma)$$

og faaer da:

$$\sin\left(\lambda + \frac{\varDelta}{2}\right) = \sin(\lambda - s) + \frac{\varrho}{2}(s - s\,e^2\cos^2\lambda - \sigma)\cos(\lambda - s) - \frac{\varrho^2 s^2}{8}\sin(\lambda - s);$$

altsaa:

$$\frac{\sin(\lambda + \frac{\varDelta}{2})}{\cos\frac{\varDelta}{2}} = \sin(\lambda - s) + \frac{\varrho}{2}(s - s\,e^2\cos^2\lambda - \sigma)\cos(\lambda - s),$$

som med Benyttelse af Udtrykket (59) for θ giver:

$$\left.\begin{aligned} \zeta = \frac{K}{N}\sin z\,\mathrm{tang}(\lambda - s)\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2\cos^2 z - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z - \tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin^2 z\,\mathrm{tang}^2(\lambda - s)\right\} \\ + \tfrac{1}{2}\left(\frac{K}{N}\right)^2\sin z\cos z\left\{1 - e^2\cos^2\lambda\right\} \end{aligned}\right\}(60)$$

Problemets Løsning vil saaledes finde sit samlede Udtryk i Formlerne:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= -\frac{N}{M_m}(s + \sigma) = -\frac{[1]_m}{[2]}(s + \sigma) \\ z_1 &= 180^\circ + z - (t + \tau) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (61)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= [2].K;\quad v = r\sin z;\quad s_0 = r\cos z; \\ t_0 &= v\,\mathrm{tang}(\lambda - s);\quad \theta_0 = v\sec(\lambda - s) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (62)$$

$$\left.\begin{aligned} \log s &= \log s_0 + 4\,c\,r\,r - 4\,c\,s_0 s_0 + [5]\,s_0 s_0 \\ \log\theta &= \log\theta_0 - 2\,c\,s_0 s_0 - 4\,c\,t_0\,t_0 + [8]\,s_0 s_0 \\ \log t &= \log t_0 - 2\,c\,r\,r - 4\,c\,t_0\,t_0 \\ \log\sigma &= \log\left(\frac{\varrho}{2}v\,t_0\right) - c\,r\,r - 3\,c\,t_0 t_0 - 3\,c\,s_0\,s_0 \\ \log\tau &= \log\left(\frac{\varrho}{2}v\,s_0\right) - \frac{6}{\varrho\varrho}[8] \end{aligned}\right\} \ldots (63)$$

hvorved vi paa en mærkelig Maade føres tilbage paa de i § 15 givne Formler, da det let erkjendes, at (61) og (63) kun ere en Sammensmeltning af (24), (26), (27) og (28) med Benyttelse af de Simplificationer, der fremkomme ved Bortkastelsen af 4de Ordens Leddene for Azimuthet. Beregningen af det specielle Exempel vil saaledes ogsaa for Breden og Længden give uforandret de i § 16 fundne Værdier. For Azimuthet vil man derimod vel atter have:

$$t = + 417'',78971$$

men nu faae:

$$\log \tau = 0{,}44808 - 0{,}00112 = 0{,}44696$$

Altsaa: $\tau = + 2'',79872$

og $z_1 = 185°42'21'',7699 - 420'',5884 = 185°35'21'',1815$,

hvilket stemmer fuldstændigt med det tidligere Resultat.

§ 30.

Uagtet Hensigten med den foretagne Omdannelse er naaet paa en tilfredsstillende Maade, idet Factorerne [3], [4], [6] og [7] ganske ere forsvundne af Formlerne, saa klæber der dog endnu ved disse den Ufuldkommenhed, at det benyttede Argument er $(\lambda - s)$ istedetfor $\lambda - \frac{N}{M_m} s$, eller et andet lignende, der uforandret kunde indtræde i den søgte Brededifferents, hvilket ikke blot i og for sig maatte synes naturligere, men tillige yderligere vilde forkorte Regningen. Ogsaa denne Ulempe lader sig imidlertid hæve uden store Vanskeligheder ved at underkaste Bredefunctionerne en fortsat Transformation.

Sætter man nemlig:

$$\lambda_0 = \lambda - \frac{N}{M_m} s = (\lambda - s) - s\left(\frac{N}{M_m} - 1\right)$$

og betegner med M_0 og N_0 de til λ_0 svarende Værdier af M og N, samt med M_n Meridianens Krumningsradius for Middelbreden:

$$\lambda_n = \frac{\lambda + \lambda_0}{2} = \lambda_m + \tfrac{1}{2} \frac{N}{M_m} \sigma,$$

saa give de almindelige Udtryk for Sphæroidens Normaler og Krumningsradier indtil Led af respective 3die og 2den Orden incl.

$$\left(\frac{N}{M_m} - 1\right) = e^2 \cos^2 \lambda + e^4 \cos^2 \lambda + \tfrac{3}{4} e^2 \varrho s \sin 2\lambda$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{N_0}\left\{1 - \tfrac{1}{2} e^2 \varrho s \frac{N}{M_m} (\sin 2\lambda - \varrho s \cos 2\lambda + e^2 \sin^2 \lambda \sin 2\lambda\right\}$$

$$= \frac{1}{N_0}\left\{1 - \tfrac{1}{2} e^2 \varrho s (\sin 2\lambda - \varrho s \cos 2\lambda + e^2 \sin 2\lambda)\right\}$$

$$\frac{1}{M_m} = \frac{1}{M_n}\left\{1 + \tfrac{3}{4}e^2\left(\frac{K}{N}\right)^2 \sin^2 z \sin^2\lambda\right\}$$

$$\frac{1}{M_m N} = \frac{1}{M_0 N_0}\left\{1 - \tfrac{5}{4}e^2\left(\frac{K}{N}\right) \cos z \sin 2\lambda\right\}$$

og man faaer tillige:

$$\operatorname{tang}(\lambda - s) = \operatorname{tang}\lambda_0 + e^2\left(\frac{K}{N}\right)\cos z$$

$$\sec(\lambda - s) = \sec\lambda_0\left\{1 + \tfrac{1}{2}e^2\varrho s(\sin 2\lambda + 3\varrho s \sin^2\lambda + e^2 \sin 2\lambda - 2\varrho s)\right\}$$

altsaa: $$\frac{\sec(\lambda - s)}{N} = \frac{\sec\lambda_0}{N_0}\left\{1 - \tfrac{1}{2}e^2\left(\frac{K}{N}\right)^2 \cos^2 z \cos^2\lambda\right\}.$$

Ved Hjælp af disse Ligninger forvandles Formlerne (56), (57), (58), (59) og (60) til følgende:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta = & -\frac{K}{M_n}\cos z\left\{1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2 \sin^2 z - \tfrac{1}{8}e^2\cos 2\lambda\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\cos^2 z + \tfrac{1}{2}e^2\cos^2\lambda\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\sin^2 z\right\} \\ & -\tfrac{1}{2}\frac{K^2\sin^2 z}{M_0 N_0}\operatorname{tang}\lambda_0\left\{1 - \tfrac{1}{12}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\cos^2 z - \tfrac{1}{4}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\sin^2 z \operatorname{tang}^2\lambda_0\right\} \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

$$\theta = \frac{K}{N_0}\sin z \sec\lambda_0\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\cos^2 z - \tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\sin^2 z \operatorname{tang}^2\lambda_0 - \tfrac{1}{3}e^2\cos^2\lambda\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\cos^2 z\right\} \quad (65)$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta = & \frac{K}{N_0}\sin z \operatorname{tang}\lambda_0\left\{1 - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\cos^2 z - \tfrac{1}{6}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\sin^2 z - \tfrac{1}{3}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2\sin^2 z \operatorname{tang}^2\lambda_0\right\} \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\frac{K}{N_0}\right)^2 \sin z \cos z\left\{1 + e^2\cos^2\lambda\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (66)$$

Og anvendes nu atter de tidligere Betegnelser med en analog, men forandret Betydning, idet man tillige sætter:

$$[9]_0 = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{N_0}{M_0},$$

saa fremstaaer Problemets nedenstaaende *tredie* Løsning, der har samme Skarphed, som den næstforegaaende *anden:*

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= -(s + \sigma) \\ z_1 &= 180^\circ + z - t - \frac{\varrho}{2} v s_0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (67)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_0 = \lambda - s;\ \ \lambda_n = \lambda - \tfrac{s}{2};\ \ v = [2]_0\, K \sin z \\
&\quad s_0 = [1]_n K \cos z \\
&\quad \theta_0 = v \sec \lambda_0 \\
&\quad t_0 = v \operatorname{tang} \lambda_0 \\
&\quad \sigma_0 = [9]_0\, v\, t_0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

$$\left.\begin{aligned}
\log s &= \log s_0 + 4\,c\,v\,v + [5]\, s_0 s_0 + 3\,[8]\, v v \\
\log \theta &= \log \theta_0 - 2\,c\,s_0 s_0 - 4\,c\,t_0 t_0 \\
\log t &= \log t_0 - 2\,c\,s_0 s_0 - 4\,c\,t_0\, t_0 - 2\,c\,v\,v \\
\log \sigma &= \log \sigma_0 - 4\,c\,s_0 s_0 - 3\,c\,t_0\, t_0 - c\,v\,v
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

At man ogsaa ved (68) giver λ_0 en noget modificeret Betydning er aabenbart ganske ligegyldigt, da Forskjellen mellem det nye s og det tidligere $\frac{N}{M_m} s$ er et meget lille Led af 4de Orden, hvis Indflydelse paa Bestemmelsen af de følgende Størrelser kun kan fremtræde i Led af 5te Orden.

§ 31.

Ved Formlerne (67), (68) og (69), som ere afgjort simplere end alle tidligere, synes det hensigtsmæssigste Valg af Argumenterne for Bredefunctionerne saa fuldstændigt naaet, at der neppe er nogensomhelst Anledning til i denne Retning at forsøge yderligere Omdannelser. Men dermed er ingenlunde sagt, at den simpleste Løsning alt skulde være fundet, thi det staaer i hvert Fald tilbage at undersøge, om ikke lignende fordeelagtige Reductioner kunne frembringes ved Forandringen af Azimuthalfunctionerne, der hidtil ere forblevne urørte. Og at dette virkeligt er Tilfældet lader sig endogsaa let eftervise. Betegner man nemlig med ε en i Secunder angivet Størrelse af 2den, eller høiere Orden, saa er det indlysende, at man indtil Led af 4de Orden incl. vil have:

$$K \sin(z - \varepsilon) = K \sin z \left\{1 - \varrho\varepsilon \cot z\right\}$$

$$K \cos(z - 2\varepsilon) = K \cos z \left\{1 + 2\varrho\varepsilon \operatorname{tang} z\right\},$$

og sættes nu her $\varepsilon = \frac{\varrho}{6} s_0 v$, ville disse Ligninger med samme Nøiagtighed give:

$$K\sin(z-\varepsilon) = K\sin z\left\{1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2 s_0^2\,(1 - e^2\cos^2\lambda)\right\}$$

$$K\cos(z-2\varepsilon) = K\cos z\left\{1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 v^2 (1 + e^2\cos^2\lambda)\right\}$$

eller ogsaa:

$$\log\left\{K\sin(z-\varepsilon)\right\} = \log(K\sin z) - 2c s_0 s_0 + [8]\, s_0 s_0$$

$$\log\left\{K\cos(z-2\varepsilon)\right\} = \log(K\cos z) + 4cvv + 2[8]vv,$$

hvorved man da ledes til følgende *fjerde* Løsning af Problemet:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= -(s+\sigma) \\ z_1 &= 180^\circ + z - 3\varepsilon - t \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\varrho}{6} s_0 v;\quad v &= [2]_0 K\sin(z-\varepsilon) \\ s_0 &= [1]_n K\cos(z-2\varepsilon) \\ \theta_0 &= v\sec\lambda_0 \\ t_0 &= v\,\mathrm{tang}\,\lambda_0 \\ \sigma_0 &= [9]_0\, v t_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

$$\left.\begin{aligned} \log s &= \log s_0 + [5]s_0 s_0 + [8]vv \\ \log\theta &= \log\theta_0 - 4ct_0 t_0 - [8]s_0 s_0 \\ \log t &= \log t_0 - 4ct_0 t_0 - 2cvv \\ \log\sigma &= \log\sigma_0 - 3ct_0 t_0 - cvv \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Disse Formlers overraskende Simpelhed forøges endnu yderligere ved deres virkelige Anvendelse, idet der med Hensyn til Leddene $+[8]vv$ og $-[8]s_0 s_0$ gjælder ganske det samme, som alt tidligere i § 26 er bleven bemærket om Leddet med Factoren [5]. Bortkastelsen af samtlige disse Led kan følgelig, selv indtil Afstande paa 200000 Fod, betragtes som fuldkommen tilladelig, og man faaer saaledes istedetfor (71) og (72) de nedenstaaende:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon = \frac{\varrho}{6}\,s\,v;\;\; s = [1]_n K\cos(z-2\varepsilon);\;\; v = [2]_0 K\sin(z-\varepsilon) \\ \theta_0 = v \sec \lambda_0 \\ t_0 = v \operatorname{tang} \lambda_0 \\ \sigma_0 = [9]_0\, v\, t_0 \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (73)$$

$$\left.\begin{aligned} \log \theta &= \log \theta_0 - 4\,c\,t_0\,t_0 \\ \log t &= \log t_0 - 4\,c\,t_0\,t_0 - 2\,c\,v\,v \\ \log \sigma &= \log \sigma_0 - 3\,c\,t_0\,t_0 - c\,v\,v \end{aligned}\right\} \;.\;.\; (74)$$

hvilke nu, foruden de to uundværlige Factorer [1] og [2], kun indeholde Factoren [9], der strengt taget maa betragtes som overflødig, da man let erkjender, at den udtrykkes ved Productet af en Constant med Quadratet af [2]. Imidlertid vil man dog sikkert stedse foretrække i den Tavle, der med 7 Decimaler bør give Logarithmerne af [1] og [2], ogsaa at indrømme en tredie Colonne for Factoren [9]. Da denne Factor, ligesom hele Beregningen af σ, kun fordrer 5 Decimaler, vil al Interpolation bortfalde ved dens Bestemmelse, hvorom man lettest overbeviser sig ved at kaste et Blik paa Tavlen II, der samlet giver Logarithmerne af de 3 nævnte Factorer, som vi dog til Benyttelse ved den skarpeste Regning have opført med respective 8 og 6 Decimalziffre. At Størrelsen ε maa bestemmes forinden man endnu kjender s og v, vil aabenbart ikke foraarsage nogensomhelst Vanskelighed, da denne Regning føres tilstrækkeligt nøie med 4 Decimaler og saaledes kun benytter de første Ziffre af de forskjellige Logarithmer, der forinden Interpolationen kunne udskrives af Tavlerne. Derimod er Løsningen ved Beregningen af s forsaavidt en *indirecte*, som man først efter en foreløbig Bestemmelse kan finde den endelige Værdie af $[1]_n$ og af selve s, men denne lille Ulempe er næsten umærkelig, da $\log [1]_n$ varierer meget langsomt.

§ 32.

Anvendes Formlerne (70), (73) og (74) paa Beregningen af det specielle Exempel, saa faaer man først:

$$\log s = 3{,}5331\,;\quad \log v = 2{,}5316$$

og med Addition af $\log \frac{\varrho}{6} = 3{,}9074$ erholdes da:

$$\log \varepsilon = 9{,}9721\,;\quad \varepsilon = +\,0'',9378.$$

Man har nu:

$$\log \cos(z - 2\varepsilon) = 9{,}9978431\,;\quad \log \sin(z - \varepsilon) = 8{,}9974748$$

og ved foreløbigt for $\log[1]_n$ at benytte den tidligere Værdie af $\log[1]_m = 8{,}5100716$ bliver:

$$\log s = 3{,}5330904\,;\quad s = +\,3412'',6394.$$

En Interpolation med Anvendelse af denne Værdie frembringer ingen Forandring i $\log[1]_n$. Bestemmelsen af s er saaledes definitiv og giver nu: $\lambda_0 = 50°\,51'\,9''2900$, med hvilket Argument man dernæst faaer:

$$\log\,[2]_0 = 8{,}5089454\,;\quad \log\,[9]_0 = 4{,}38571$$

$$\log \sec \lambda_0 = 0{,}1997520\,;\quad \log \operatorname{tang} \lambda_0 = 0{,}0893472\,;$$

følgelig ogsaa:

$$\log v = 2{,}5315959$$

og derefter:

$$\log \theta_0 = 2{,}7313479$$

$$\log t_0 = 2{,}6209431$$

$$\log \sigma_0 = 9{,}53825.$$

For at finde de logarithmiske Correctioner bestemmes endvidere:

$$\log c\,t_0\,t_0 = 0{,}1717\,;\quad \log c\,v\,v = 9{,}9930$$

og man har saaledes i Eenheder af 7de Decimal:

$$c\,t_0\,t_0 = 1{,}48\,;\quad c\,v\,v = 0{,}98$$

som respective for $\log \theta_0$, $\log t_0$ og $\log \sigma_0$ give, udtrykte i samme Eenheder, Correctionerne: -6, -8 og -5, altsaa:

$$\log \theta = 2{,}7313473$$

$$\log t = 2{,}6209423\,;\quad t = +\,417'',7749$$

$$\log \sigma = 9{,}53825\,;\quad \sigma = +\quad 0'',3453.$$

$$\varDelta = -\,(3412'',6394 + 0'',3453) = -\,3412'',9847$$

$$z_1 = 185°\,42'\,21'',7699 - 2{,}8134 - 6'\,57'',7749 = 185°\,35'\,21''1816,$$

hvor Overeensstemmelsen med de tidligere Resultater er saa fuldstændig, som den kan erholdes ved en Regning med 7 Decimaler.

§ 33.

Vi have i det Foregaaende bestræbt os for at underkaste det behandlede Problem en saavidt muligt udtømmende Analyse. Saavel den indirecte sphæriske som den directe sphæroidiske Løsning ere først blevne udtrykte i de Former, hvori de naturligst frembøde sig, og disse Løsninger ere dernæst udviklede i Rækker med den Nøiagtighed, som Opgaven efter sin Eiendommelighed kunde fordre og tilstede. Det var en Selvfølge, at begge Løsninger maatte frembringe de samme Rækker, og disses Identitet kunde derfor tjene til Bekræftelse paa Løsningernes Paalidelighed. Ved Rækkerne sondredes og bragtes til Evidents ethvert af de Elementer, der nødvendigt maatte indtræde i et hvilketsomhelst System af Formler, som med den fastsatte Nøiagtighed skulde løse det givne Problem, og for at finde den heldigste Løsning stod det saaledes kun tilbage paa den hensigtsmæssigste Maade at samle og omforme de mangfoldige Led, hvori Rækkerne vare søndersplittede. Vi have derfor udførligt gjennemgaaet alle de Transformationer, som i denne Henseende syntes med Fordeel at kunne anvendes, og det er ogsaa lykkedes efter en Række af Omdannelser at frembringe en Løsning, der er saa simpel, at den neppe lader stort Haab tilbage om at finde en endnu simplere. Men er den indslaaede Vei endogsaa den naturligste, og er den maaskee den eneste, der med Sikkerhed aabner Udsigten til at naae det opstillede Maal, saa er det dog vist, at den kun sjeldent vil være den korteste, thi netop i samme Grad som Resultatet bliver elegant og simpelt, i samme Grad voxer ogsaa Sandsynligheden for at det let og hurtigt vil kunne erholdes, idet en nøiere Undersøgelse næsten uden Undtagelse viser, at de heldige analytiske Omdannelser ere knyttede til simple geometriske Constructioner. Opdagelsen af disse umiddelbart og uden Hjælp af Analysen vil imidlertid som oftest være vanskelig og beroe paa et eget Held, eller et eiendommeligt Blik paa Opgaven, som ikke kan fremtvinges, hvorimod det i Regelen er let at paapege det rette Standpunkt for Betragtningen, naar Resultatet først er givet og Transformationerne fuldkommen bekjendte. At disse almindelige Bemærkninger ogsaa finde Anvendelse paa den her behandlede Opgave, vil det Efterfølgende kunne tjene til at vise.

Der gives nemlig tvende Tilfælde, hvor Problemet umiddelbart fremtræder som høist simpelt. Det første er det, hvor Triangelsiden falder sammen med Meridianen. Betegner man her den givne Triangelsides Størrelse med Q, regnet positiv mod Syd og negativ mod Nord, med λ og λ_0 Bredderne for Udgangspunktet A og Sidens andet Endepunkt C, samt med M_n Meridianens Krumningsradius for Middelbreden: $\dfrac{\lambda + \lambda_0}{2}$, saa giver Meridianbuens bekjendte Rectification:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{Q}{\varrho M_n}\left\{1 - \frac{e^2 \cos 2\lambda}{8}\left(\frac{Q}{M_n}\right)^2\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (75)$$

og denne Ligning bestemmer da Brededifferentsen indtil Led af 4de Orden incl. Længdedifferentsen mellem Punkterne A og C er Nul, og man erholder Azimuthet for Siden AC i Punktet C ved at addere 180° til det givne Azimuth (0° eller 180°) for Punktet A.

Det andet ovenfor antydede Tilfælde vil indtræde, hvor Azimuthet er 90° eller 270°, det vil sige, hvor den givne Triangelside falder sammen med Meridianens Perpendiculær. Af Formlerne (11), (14) og (15) fremgaaer det, at man da indtil Led af 3die Orden incl. har $\delta = 0$, og indtil Led af 4de Orden incl. saavel $K_2 = K$ som $L_2 = L$, idet L_2 aabenbart er en Størrelse af 2den Orden. I Henhold til § 12 vil man følgelig ogsaa med den fordrede Nøiagtighed kunne betragte Triangelsiden som umiddelbart liggende paa selve den Kugle, der, naar Udgangspunktets Brede er λ_0, har Normalen N_0 til Radius, og hele Beregningen lader sig saaledes gjennemføre som en reen sphærisk, naar det kun iagttages at multiplicere den fundne sphæriske Brededifferents med Størrelsen $\frac{N_0}{M_0}$. Betegnes Triangelsiden CB med $P = pN_0$, og regnes den positiv mod Vest, negativ mod Øst, saa danner Udgangspunktet C og Sidens Endepunkt B i Forbindelse med Kuglens Pol en retvinklet sphærisk Triangel, der til Bestemmelse af Længdedifferentsen θ, Azimuthaldifferentsen t og den sphæriske Brededifferents l giver Ligningerne:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda_0 - l) &= \cos p \sin \lambda_0 \\ \operatorname{tang} \theta &= \operatorname{tang} p \sec \lambda_0 \\ \operatorname{tang} t &= \sin p \operatorname{tang} \lambda_0 \end{aligned}$$

eller udviklede i Række:

$$\left.\begin{aligned} l &= \tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{tang} \lambda_0 \left\{ 1 - \tfrac{1}{12} p^2 - \tfrac{1}{4} p^2 \operatorname{tang}^2 \lambda_0 \right\} \\ \theta &= p \sec \lambda_0 \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} p^2 \operatorname{tang}^2 \lambda_0 \right\} \\ t &= p \operatorname{tang} \lambda_0 \left\{ 1 - \tfrac{1}{6} p^2 - \tfrac{1}{3} p^2 \operatorname{tang}^2 \lambda_0 \right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (76)$$

Men herved er nu tillige Alt fuldstændigt forberedet for Løsningen af den almindelige Opgave, hvor Retningen af den givne Triangelside $AB = K$ er vilkaarlig bestemt ved Azimuthet z, som vi indtil videre, for at fremkalde et klart Billede, ville forestille os liggende i 1ste Quadrant. Tænker man sig nemlig fra Punktet B nedfældet en Perpendiculær paa Udgangspunktets Meridian, som den gjennemskjærer i Punktet C, saa kjender man aabenbart i den derved dannede retvinklede sphæroidiske Triangel ikke blot den rette Vinkel i C, men ogsaa begge de andre Vinkler i A og B, som bestemmes ved det givne Azimuth og Vinkelsummens Exces. Ved Hjælp af det *Legendre*'ske Theorem, der netop med den fordrede Nøiagtighed (for Vinkler og Sider indtil Led af respective 3die og 4de Orden incl.) er gjældende for sphæroidiske Triangler med Sider af 1ste Orden, kan man da beregne saavel $AC = Q$, som $BC = P$, og den søgte Løsning fremstaaer saaledes ved en successiv Anvendelse af Formlerne (75) og (76), idet Azimuthet

z_1 for Siden BA i Punktet B bestemmes ved Azimuthet for BC i Forbindelse med Vinklen B. Da man nu let kan vise, at den sphæroidiske Exces for Trianglen ABC, indtil Led af 3die Orden incl., udtrykkes nøiagtigt ved den numeriske Værdie af Störrelsen $\frac{\varrho}{2} s_0 v$, saa har man i nærværende Tilfælde:

$$A = z\,; \quad B = 90^\circ - z + 3\varepsilon\,; \quad C = 90.$$

Altsaa:

$$Q = K \,.\, \frac{\sin(B - \varepsilon)}{\cos\varepsilon} = K \cos(z - 2\varepsilon)$$

$$P = K \,.\, \frac{\sin(A - \varepsilon)}{\cos\varepsilon} = K \sin(z - \varepsilon)$$

og:
$$\frac{Q}{\varrho M_n} = s_0\,; \quad p = \frac{P}{N_0} = \varrho v.$$

Indsættes disse Værdier i (75) og (76) og bemærkes det, at man har:

$$\varDelta = -(\lambda - \lambda_0) - \frac{N_0}{M_0} l$$

$$z_1 = 270^\circ - t - B,$$

saa fremtræder Løsningen under følgende Form:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta &= -(s + \sigma) \\ z_1 &= 180^\circ + z - 3\varepsilon - t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\varrho}{6} s_0 v\,; \quad v = [2]_0 K \sin(z - \varepsilon) \\ s_0 &= [1]_n K \cos(z - 2\varepsilon) \\ \theta_0 &= v \sec\lambda_0 \\ t_0 &= v \operatorname{tang}\lambda_0 \\ \sigma_0 &= [9]_0 v t_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

$$\left.\begin{aligned} \log s &= \log s_0 + [5]\, s_0 s_0 \\ \log \vartheta &= \log \theta_0 - 4 c t_0 t_0 \\ \log t &= \log t_0 - 4 c t_0 t_0 - 2 c v v \\ \log \sigma &= \log \sigma_0 - 3 c t_0 t_0 - c v v \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

og det er vistnok indlysende, at disse Formler uden nogen

Modification ere gjældende for alle 4 Quadranter, idet Forandringerne i Udtrykkene for Vinklerne A og B fuldstændigt compenseres ved Tegnskifterne for ε, der i 1ste og 3die Quadrant er positiv, i 2den og 4de derimod negativ.

§ 34.

Formlerne (77) og (78) ere identiske med de tidligere (70) og (71). Derimod kan det, ved Sammenligningen af (79) med (72), vække Forundring, at de to forhen omhandlede Led, der indeholde Factoren [8], nu ganske ere forsvundne af (79). En nærmere Undersøgelse vil imidlertid uden Vanskelighed oplyse Grunden til denne Uovereensstemmelse. Anvendelsen af *Legendre*'s Theorem paa Beregningen af sphæroidiske Triangler forudsætter nemlig med Nødvendighed, at Triangelsiderne, naar Skarpheden skal fyldestgjøre de opstillede Fordringer, bestemmes som korteste Linier paa Overfladen, hvorimod vi stedse i alle foregaaende Løsninger have fastlagt Triangelpunkterne ved verticale Snit gjennem de forskjellige Triangelhjørner. Da selve Meridianen er en geodætisk Linie, og da de reciproque Verticalsnit i C og B, under Iagttagelse af den anvendte Nøiagtighed, ere sammenfaldende og mellem sig indeslutte den tilsvarende geodætiske Linie CB, saa bortfalder vel Forskjellen ganske for de to Sider af Trianglen ABC, men for den tredie Side AB fremtræder den derimod med sin fulde Betydning. Medens det saaledes med Hensyn til Azimuthet saavel i (75) som i (76) er fuldkommen ligegyldigt, om det givne z betragtes som bestemmende den geodætiske Linie, eller det tilsvarende verticale Snit gjennem det aflagte Punkt, saa er Forholdet et ganske andet for de sidst anførte Formler (77) til (79), der hvile paa den ved det Legendre'ske Theorem tilveiebragte Overgang fra Siden AB til Siderne AC og CB, og det er indlysende, at Azimuthet her udelukkende maa henføres til den geodætiske Linie mellem A og B. Betegnes dette Azimuth til Adskillelse fra alle tidligere benyttede med Z, saa vil man, som bekjendt, have Ligningen:

$$Z = z - \tfrac{1}{12} e^2 \left(\frac{K}{R}\right)^2 \cos^2\lambda \sin 2z - \tfrac{1}{48} e^2 \left(\frac{K}{R}\right)^3 \sin 2\lambda \sin z$$

eller indtil Led af 3die Orden incl.

$$Z = z - \tfrac{1}{6} \varrho^2 e^2 \cos^2\lambda \,.\, s_0 v\,;$$

følgelig ogsaa:

$$\log\sin(Z - \varepsilon) = \log\sin(z - \varepsilon) - [8]\, s_0\, s_0$$
$$\log\cos(Z - 2\varepsilon) = \log\cos(z - 2\varepsilon) + [8]\, v\, v$$

og Overeensstemmelsen vil saaledes paany være fuldstændigt tilveiebragt. At det kun ere Ligningerne for Breden og Længden, der lide en Forandring ved Ombytningen af Z med z, følger aabenbart deraf, at man indtil Led af 3die Orden incl. har $Z_1 - z_1 = Z - z$, eller $Z_1 - Z = z_1 - z$. Det sees tillige, at den geodætiske Linie ligeoverfor Verticalsnittene besidder et virkeligt Fortrin, idet den medfører en noget simplere Løsning, eller, hvad der er det samme, giver Formlerne (73) og (74) en noget forøget Skarphed; og naar det for et Øieblik kan forekomme høist besynderligt, at man, uden at kjende selve Ligningen for Linien, er istand til nøiagtigt at bestemme Beliggenheden af de ved den aflagte Punkter paa Klodens Overflade, saa vil ogsaa dette Paradox have fundet sin fuldstændige Forklaring i det ovenfor Udviklede.

§ 35.

En Fremgangsmaade, der har meget tilfælleds med den i § 33 anvendte, er benyttet mangfoldige Gange, især ved Bestemmelsen af geodætiske Positioner gjennem retvinklede sphæriske, eller sphæroidiske Coordinater. Det er derfor saa meget desto mærkeligere, at man hidtil, saavidt mig bekjendt, stedse har overseet, at de tilsvarende Formler kunne gives saa stor Skarphed ved en simpel Forandring af de anvendte Kuglers Radier. Bortkastes det i hvert Fald høist ubetydelige Led, der indeholder Factoren [5], vil Løsningen nemlig i alle dens Enkeltheder kunne betragtes som reen sphærisk, og dens Eiendommelighed bestaaer da netop deri, at den fordrede Nøiagtighed erholdes ved et successivt Brug af *fire* forskjellige Kugler. Den *første*, med Radius $\sqrt{N_0 M_n}$, tjener til Beregningen af Q og P, den *anden*, med Radius M_n, til Bestemmelsen af Amplituden for Q, den *tredie*, hvis Radius er N_0, giver θ, t og l, den *fjerde* og sidste endelig, der har Radien M_0, selve den til Parallelafstanden lN_0 svarende sphæroidiske Bredediffe-rents σ. Ved denne directe Udledelse af (70), (73) og (74) opnaaes tillige, at det bliver muligt for større Afstande endnu yderligere at forøge Formlernes Skarphed, forsaavidt dette iøvrigt nogensinde skulde ansees nødvendigt. Det erkjendes nemlig let, at man for meget store Værdier af K maa søge den væsenligste Kilde til Feil i selve Rækkeudviklingen, der især ved Bestemmelsen af θ bortkaster ikke ubetydelige Led af høiere end 4de Orden. Men disse Feil undgaaes naturligviis fuldstændigt, naar Beregningen føres ved Hjælp af de endelige Formler, af hvilke den første, der giver $\sin(\lambda_0 - l)$, kan omskrives paa følgende Maade:

$$\sin l = \sin p \tang \tfrac{1}{2}\theta \sin \lambda_0 .$$

Forlanges ogsaa Azimuthet med stor Nøiagtighed vil det være hensigtsmæssigt at benytte det tidligere Udtryk for ζ, og hele Løsningen fremstilles da ved Formlerne:

$$\left.\begin{array}{c}
\Delta = -(s+\sigma) = -s - [9]_0 l \\
z_1 = 180^\circ + z - \zeta \\
\overline{} \\
\varepsilon = \dfrac{\varrho}{6} s v; \quad s = [1]_n K \cos(z - 2\varepsilon); \quad v = [2]_0 K \sin(z - \varepsilon) \\
\overline{} \\
\tang \theta = \tang v \sec \lambda_0 \\
\sin l = \sin v \tang \tfrac{1}{2}\theta \sin \lambda_0 \\
\tang \tfrac{1}{2}\zeta = \tang \tfrac{1}{2}\theta \sin\left(\lambda + \tfrac{\Delta}{2}\right) \sec\left(\tfrac{\Delta}{2}\right)
\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (80)$$

hvor z atter bør betragtes som Azimuth for den geodætiske Linie gjennem det aflagte Punkt.

Det fortjener maaskee at fremhæves, at den samme Vei, der paa Sphæroiden fører til Formlerne (77), (78) og (79), vil, anvendt paa Kuglen, lede directe og paa den naturligste Maade til den i

§ 15 benyttede, elegante sphæriske Løsning, der skyldes *Gauss.* I denne Løsning ere nemlig de to Sider af Trianglen ABC angivne i Secunder ved r og s, den tredie Side ved $v(1-\frac{1}{6}\varrho^2 s_0^2)$, medens τ er Trianglens sphæriske Exces, som indtil Led af 4de Orden incl. bestemmes ved:

$$\tau = \frac{\varrho}{2} s v (1-\tfrac{1}{6}\varrho^2 s_0^2)\left\{1+\tfrac{1}{12}\varrho^2 r^2\right\} = \frac{\varrho}{2} s_0 v\left\{1+\tfrac{5}{12}\varrho^2 r^2 - \tfrac{1}{2}\varrho^2 s_0^2\right\}$$

§ 36.

For at give en Forestilling om den Nøiagtighed, der kan opnaaes ved Formlerne (80), skulle vi endnu til Slutning vise deres Anvendelse paa Beregningen af et specielt Exempel, som vi laane fra den i foregaaende Aar under Titelen »Ordnance Survey. Account of the Principal Triangulation« offentliggjorte Beretning om de større geodætiske Arbeider, der ere udførte i England. I det nævnte, for den nyere Geodæsie i flere Henseender vigtige Værk, findes nemlig tvende forskjellige Løsninger af det behandlede Problem, hvoraf den ene vel har megen Lighed med den ovenfor udviklede, men dog langtfra besidder samme Skarphed, da den saavel ved Breden som ved Længden bortkaster Leddene af 4de Orden, medens den anden derimod, under Forudsætning af en Beregning med *tiziffrede* Logarithmer, ganske svarer til (80), hvad Nøiagtigheden angaaer. Det er for at belyse denne, at man har gjort Brug af det eiendommelige Exempel, som ogsaa vi til Sammenligning ville benytte, idet vi dog overalt omskrive Størrelserne ved Hjælp af de tidligere vedtagne Betegnelser.

Efter vilkaarligt at have fastlagt Punkterne A og B ved deres Breder og indbyrdes Længdedifferents, der ere valgte saaledes:

$$\lambda = 52^\circ\ 0'\ 0'';$$
$$\lambda_1 = 53^\circ\ 30'\ 0''; \quad \theta = -\ 4^\circ\ 30'\ 0'',$$

har man først gjennem en directe sphæroidisk Beregning fundet følgende Værdier for Afstanden $AB = K$, udtrykt i engelske Fod, og for Azimutherne z og z_1 af de tilsvarende Verticalsnit:

$$\log K = 6{,}0557700907$$
$$z = 239^\circ\ 26'\ 22'',8116$$
$$z_1 = 63^\circ\ 1'\ 21'',5771\,,$$

hvor vi dog for z_1 have tilføiet et udeladt 4de Decimal.

Ved nu at indsætte K, z og λ i de omhandlede engelske Formler, bestemme disse med tiziffrede Logarithmer λ_1, θ og z_1 paa følgende Maade:

$$\lambda_1 = 53^\circ\ 29'\ 59'',9994$$
$$\theta = -4^\circ\ 30'\ 0'',0002$$
$$z_1 = 63^\circ\ 1'\ 21'',5984\,,$$

en Overeensstemmelse, som for en Afstand paa 214 engelske miles, eller mere end 1137000 engl. Fod, vistnok maa findes yderst tilfredsstillende.

For at kunne anvende Formlerne (80) maa man først henføre Azimuthet til den geodætiske Linie gjennem A og B. Den i § 34 anførte Ligning giver imidlertid med største Lethed den tilsvarende Azimuthdifferents $= -0'',11206 + 0'',00383 = -0'',1082$, og man har altsaa her:

$$\log K = 6{,}05577009$$
$$z = 239^\circ\ 26'\ 22'',7034$$
$$\lambda = 52^\circ\ 0'\ 0''$$

idet $\log K$ angives med 8 Decimalziffre, da en Regning med færre Decimaler vilde gjøre Sammenligningen illusorisk.

Efter en foreløbig Bestemmelse finder man nu:

$$\log s = 3{,}756262_n\,;\quad \log v = 3{,}983612_n\,,$$

som med Addition af $\log \frac{\varrho}{6} = 3{,}907424$ giver:

$$\log \varepsilon = 1{,}647298\,;\quad \varepsilon = +\,44'',3913$$

og dernæst:

$$\log\cos(z - 2\varepsilon) = 9{,}70656109_n\,;\quad \log\sin(z - \varepsilon) = 0{,}93499536_n\,.$$

Med Benyttelse af de engelske Tavler (pag. 675) for Sphæroidens Normaler og Krumningsradier har man endvidere:

$$\log\,[1]_n = 7{,}99393075\,;\quad \text{altsaa:}$$

$$\log s = 3{,}75626193_n\,;\quad s = -\,5705'',0825\,;\quad \lambda_0 = 53^\circ\ 35'\ 05''0825$$

og dernæst ved Hjælp af Argumentet λ_0

$\log [2]_0 = 7{,}99284631$; $\log \sec \lambda_0 = 0{,}22648184$; $\log \sin \lambda_0 = 9{,}9056533$.

Man faaer da successive:

$\log v = 3{,}98361176_n$; $\log \operatorname{tang} v = 8{,}66950231_n$; $\log \sin v = 8{,}6690289_n$;

$\log \operatorname{tang} \theta = 8{,}89598415_n$; $\boldsymbol{\theta = -4^\circ\,30'\,0'',0000}$;

$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta = 8{,}59428321_n$; $\log \sin l = 7{,}1689654$; $\log l = 7{,}1689656$,

hvilket atter med Addition af $\log [9]_0 = 5{,}3154517$ giver:

$$\log [9]_0 l = 2{,}4844173; \quad [9]_0 l = +305'',0825.$$

Altsaa:

$$\Delta = +5705'',0825 - 305'',0825 = +5400'',0000$$

$$\lambda_1 = \mathbf{53^\circ\,30'\,0'',0000}.$$

Til Bestemmelse af ζ opslaaes endnu:

$$\log \sin \left(\lambda + \frac{\Delta}{2}\right) = 9{,}90091416; \quad \log \sec \frac{\Delta}{2} = 0{,}00003721,$$

og man har da:

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\zeta = 8{,}49523458_n; \quad \tfrac{1}{2}\zeta = -1^\circ\,47'\,29'',38274;$$

$$\zeta = -3^\circ\,34'\,58''7655.$$

For at gjenfinde z_1 maa denne Værdie af ζ combineres med det oprindeligt givne Azimuth for Verticalsnittet, altsaa:

$$z_1 = 59^\circ\,26'\,22'',8116 + 3^\circ\,34'\,58',7655 = \mathbf{63^\circ\,1'\,21'',5771}.$$

At Overeensstemmelsen overalt bliver fuldstandig kan aabenbart kun beroe paa en tilfældig Compensation af de forskjellige Feil.

I.

λ	log [1]	Diff.	log [2]	Diff.	log [3]	Diff.	log [4]	log [5]	log [6]	log [7]	log [8]
58° 0′	8,7994018	114	8,7985854	38	2,18674	279	3,7656	2,6	2,20	2,12	2,50
57°50′	4132	114	5892	39	8395	278	7606	6	20	11	51
40	4246	115	5931	38	8117	278	7556	6	19	11	51
30	4361	115	5969	38	7839	277	7507	6	19	10	51
20	4476	115	6007	39	7562	276	7458	5	18	10	52
10	4591	116	6046	38	7286	275	7409	5	18	09	52
57° 0′	4707	116	6084	39	7011	275	7361	5	18	09	53
56°50′	4823	116	6123	39	6736	274	7312	5	17	08	53
40	4939	117	6162	38	6462	273	7264	5	17	08	53
30	5056	116	6200	39	6189	273	7216	5	16	08	54
20	5172	118	6239	39	5916	272	7168	5	16	07	54
10	5290	117	6278	39	5644	271	7121	5	15	07	55
56° 0′	5407	117	6317	40	5373	271	7073	5	15	06	55
55°50′	5524	118	6357	39	5102	270	7026	5	15	06	55
40	5642	118	6396	39	4832	269	6979	5	14	06	56
30	5760	119	6435	40	4563	269	6932	5	14	05	56
20	5879	119	6475	39	4294	268	6886	5	13	05	56
10	5998	118	6514	40	4026	267	6839	5	13	04	57
55° 0′	6116	120	6554	40	3759	267	6793	5	12	04	57
54°50′	6236	119	6594	39	3492	267	6747	5	12	03	57
40	6355	120	6633	40	3225	266	6701	4	12	03	58
30	6475	120	6673	40	2959	265	6655	4	11	03	58
20	6595	120	6713	40	2694	265	6609	4	11	02	59
10	6715	120	6753	40	2429	264	6564	4	10	02	59
54° 0′	6835	121	6793	41	2165	264	6519	4	10	01	59
53°50′	6956	121	6834	40	1901	263	6473	4	10	01	60
40	7077	121	6874	40	1638	263	6429	4	09	01	60
30	7198	121	6914	41	1375	263	6384	4	09	00	60
20	7319	121	6955	40	1112	262	6339	4	08	00	61
10	7440	122	6995	41	0850	261	6295	4	08	00	61
53° 0′	8,7997562		8,7987036		2,10589		3,6250	4	2,08	1,99	2,61

$\log c = 4{,}9298$; $\log \varrho = 4{,}3845449$; $\log \frac{6}{\varrho\varrho} = 1{,}4070$; $\log \frac{\varrho}{6} = 3{,}9074$

$$[1] = \frac{1}{\varrho M};\quad [2] = \frac{1}{\varrho N};\quad [3] = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{2\varrho MN};\quad [4] = \left\{\frac{1+3\operatorname{tang}^2\lambda}{6} - \tfrac{3}{4}e^2\sin^2\lambda\right\}\frac{\mu}{NN}\cdot 10^7;$$

$$[5] = -\frac{e^2\cos 2\lambda}{8}\mu\varrho\varrho\cdot 10^7;\quad [6] = \frac{3+5\operatorname{tang}^2\lambda}{4}\,\frac{\mu}{NN}\cdot 10^5;$$

$$[7] = \frac{2+3\operatorname{tang}^2\lambda}{3}\,\frac{\mu}{NN}\cdot 10^5;\quad [8] = \frac{e^2\cos^2\lambda}{6}\mu\varrho\varrho\cdot 10^7.$$

II.

λ	log [1]	Diff.	log [2]	Diff.	log [9]
58° 0′	8,79940180		8,79858545		4,385361
		1141		380	
57° 50′	41321		58925		369
		1144		381	
40	42465		59306		376
		1147		382	
30	43612		59688		384
		1150		384	
20	44762		60072		392
		1153		384	
10	45915		60456		399
		1156		385	
57° 0′	47071		60841		407
		1159		387	
56° 50′	48230		61228		415
		1162		387	
40	49392		61615		423
		1165		388	
30	50557		62003		430
		1168		390	
20	51725		62393		438
		1170		390	
10	52895		62783		446
		1174		391	
56° 0′	54069		63174		454
		1176		392	
55° 50′	55245		63566		462
		1178		393	
40	56423		63959		470
		1182		394	
30	57605		64353		477
		1184		395	
20	58789		64748		485
		1187		395	
10	59976		65143		493
		1189		396	
55° 0′	61165		65539		501
		1192		398	
54° 50′	62357		65937		509
		1194		398	
40	63551		66335		517
		1196		399	
30	64747		66734		525
		1199		399	
20	65946		67133		533
		1202		401	
10	67148		67534		541
		1203		401	
54° 0′	68351		67935		549
		1206		402	
53° 50′	69557		68337		557
		1208		403	
40	70765		68740		565
		1210		403	
30	71975		69143		573
		1213		404	
20	73188		69547		581
		1214		405	
10	74402		69952		589
		1217		405	
53° 0′	8,79975619		8,79870357		4,385597

$$[1] = \frac{1}{\varrho M}; \quad [2] = \frac{1}{\varrho N}; \quad [9] = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{N}{M}.$$